



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DELL'AQUILA



DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA CIVILE,
EDILE-ARCHITETTURA ED AMBIENTALE

TESI DI LAUREA MAGISTRALE IN
INGEGNERIA PER L'AMBIENTE ED IL TERRITORIO

MODELLO NUMERICO PER LA
CARATTERIZZAZIONE DEL GETTO A VALLE DI
SFIORATORI A SALTO DI SCI

LAUREANDO
Giampaolo Carducci

Matr. 226785

RELATORE
Prof. Ing. Marcello Di Risio

CORRELATORE
Ing. Daniele Celli

Anno Accademico
2014/2015

*

*

*Al mio caposaldo, Maurizio,
alla persona più premurosa , Rosalba
a quella dolce imbranata, Alessia...
..ad un angolo colmo d'amore, Laura*

*

*

*

*

... chi ha poca testa, ha gambe forti...

*

*

Sommario

Nel panorama globale, la produzione energetica da fonti rinnovabili ha subito un incremento incentivato dalle problematiche ambientali. La progettazione di bacini di raccolta delle acque finalizzata alla produzione di energia elettrica, via preferenziale per la produzione da fonti rinnovabili, ha portato a progettare opere idrauliche di dimensioni a scala regionale che necessitano di opere accessorie di complessità paragonabile all'opera idraulica principale. Di qui lo studio nello specifico di sfioratori di superficie a salto di sci: opere idrauliche in grado di smaltire portate con velocità medie dell'ordine dei 40 m/s.

Lo scopo del lavoro di tesi è quello di valutare, avvalendosi del modello matematico Lattice-Boltzmann, le caratteristiche idrodinamiche del getto generato da uno sfioratore a salto di sci entrante in una vasca di dissipazione. Per avere una stima dell'impronta di scavo generata dall'interazione del getto con una superficie pseudo-erodibile sul fondo di una vasca di dissipazione, viene analizzata la variazione altimetrica del fondo correlandola con la valutazione spaziale delle relative velocità tangenziali. L'implementazione del modello Lattice-Boltzmann è stata effettuata utilizzando il codice di calcolo Palabos, libreria open-source scritta in linguaggio C++.

PAROLE CHIAVE: *salto di sci, CFD, Metodo Lattice-Boltzmann, Palabos, impronta di scavo, analisi fluidodinamica.*

Abstract

Spillways in the structure of a dam enables proper disposal of flood water in excess of the reservoir capacity, and regulates the energy of flowing water downstream. Some spillways dissipate energy in the form of ski-jump which leads to scouring process. Therefore a prediction of the scour is necessary and linked with the ski-jump trajectory.

The aim of the study is to define the hydrodynamic characteristics of the ski-jump jet, using Lattice-boltzmann Method implemented by open-source CFD solver Palabos written in C++. Moreover, the effects of the previously analyzed jet on plunge pool scour was assessed by *Exner* equation. The goal of this approach is to predict the scour area on the plunge pool through the analysis of the bottom velocities.

KEYWORDS: *ski-jump, CFD, Lattice-Boltzmann, Palabos, scour prediction, spillway.*

Indice

1	INTRODUZIONE	1
2	EVOLUZIONE DEL MODELLO	3
2.1	Cellular Automata	3
2.2	Lattice Gas Cellular Automata	4
2.2.1	<i>Il modello HPP</i>	4
2.2.2	<i>Il modello FHP</i>	5
2.3	Difetti dei modelli lattice gas	8
3	I MODELLI LATTICE BOLTZMANN	10
3.1	L'equazione di Boltzmann	10
3.2	L'operatore di collisione	12
3.2.1	<i>Rilassamento verso l'equilibrio</i>	14
3.3	Approssimazione BGK	15
3.4	Conservazione delle proprietà macroscopiche	15
3.5	L'espansione di Chapman-Enskog	17
3.6	Da Boltzmann a Navier-Stokes: Espansione multi-scala	18
3.7	L'equazione Lattice Boltzmann	20
3.8	LBGK bidimensionale	21
3.9	LBGK tridimensionale	25
3.10	Modelli Lattice Boltzmann MRT	27
3.11	Condizioni al contorno	27
3.11.1	<i>Condizioni periodiche</i>	28
3.11.2	<i>Condizioni No-Slip e Free-Slip</i>	29
3.11.3	<i>Condizioni Inlet-Outlet</i>	33
4	SFIORATORI DI SUPERFICIE A SALTO DI SCI	35
4.1	Tipologie e funzioni di uno sfioratore di superficie	35
4.2	Dissipatore a salto di sci	36
4.3	Caratterizzazione del getto da letteratura	38
4.4	Studio morfodinamico semplificato	41

5	MODELLO LATTICE-BOLTZMANN APPLICATO A SFIORATORI DI SUPERFICIE	
	A SALTO DI SCI	43
5.1	Problema ingegneristico	43
5.2	Riduzione del dominio di calcolo	43
5.3	Implementazione del codice di calcolo Palabos	44
5.3.1	<i>Parametri caratteristici del modello</i>	45
5.4	Schema di analisi	46
5.5	Simulazione 1	46
5.5.1	<i>Geometria del modello</i>	46
5.5.2	<i>Superficie libera</i>	48
5.5.3	<i>Andamento delle velocità</i>	50
5.5.4	<i>Andamento delle pressioni</i>	51
5.6	Simulazione 2	52
5.6.1	<i>Superficie libera</i>	52
5.6.2	<i>Andamento delle velocità</i>	55
5.6.3	<i>Andamento delle pressioni</i>	56
5.7	Simulazione Finale	57
5.7.1	<i>Superficie libera</i>	57
5.7.2	<i>Andamento delle velocità</i>	59
5.7.3	<i>Andamento delle pressioni</i>	60
5.7.4	<i>Superficie libera</i>	61
5.7.5	<i>Andamento delle velocità</i>	62
5.7.6	<i>Andamento delle pressioni</i>	63
6	ANALISI DELLE SIMULAZIONI	64
6.1	Analisi Simulazione 1 e 2	64
6.1.1	<i>Area di impatto A_i</i>	64
6.1.2	<i>Velocità d'impatto \mathbf{v}_i</i>	65
6.1.3	<i>Angolo medio d'impatto α_i</i>	65
6.1.4	<i>Pressioni dinamiche sul fondo p_b della vasca di dissipazione</i>	66
6.1.5	<i>Velocità medie \mathbf{v}_b sul fondo della vasca di dissipazione</i>	67
6.2	Validazione dell'approssimazione sulla simmetria del dominio	67
6.2.1	<i>Confronto sull'area d'ingresso</i>	67
6.2.2	<i>Confronto sull'angolo d'impatto α_i</i>	68
6.2.3	<i>Confronto dell'analisi temporale della velocità d'impatto v_i</i>	68
6.2.4	<i>Confronto dell'analisi temporale della pressione dinamica sul fondo</i>	69
6.2.5	<i>Confronto dell'analisi della velocità sul fondo</i>	70
6.3	Analisi Simulazione Finale	71
6.3.1	<i>Area d'impatto A_i</i>	71
6.3.2	<i>Angolo medio d'impatto α_i</i>	71
6.3.3	<i>Gittata L_i</i>	75

6.3.4	<i>Velocità d'impatto \mathbf{v}_i</i>	78
6.3.5	<i>Pressioni p_b e velocità \mathbf{v}_b sul fondo della vasca di dissipazione</i>	78
6.4	<i>Variazione spaziale delle velocità tangenziali sul fondo v_x e v_y</i>	79
6.4.1	<i>Analisi della Simulazione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	79
6.4.2	<i>Analisi della Simulazione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	84
6.4.3	<i>Stima delle dimensioni di scavo per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	87
6.4.4	<i>Valutazione impronta di scavo $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	89
6.5	<i>Ricostruzione dell'intero dominio</i>	90
7	OSSERVAZIONI CONCLUSIVE E LAVORI FUTURI	95

Elenco delle figure

2.1	Reticolo 2D a celle quadrate con nodi di coordinate $n_{i,j}$ e velocità della particella c_{ij} . . .	4
2.2	Il reticolo triangolare del modello FHP con simmetria esagonale. I vettori c_i rappresentano le velocità reticolari	5
2.3	Collisioni nel metodo FHP [Succi 2001]	6
3.1	Evoluzione schematica dei modelli LB (nl = non linear; ql = quasi-linear; ec = enhanced collision). [Succi 2001]	10
3.2	Pre e Post-collisione tra due particelle di massa uguale riferita al centro di massa.	13
3.3	Modello Lattice Boltzmann D_2Q_9	22
3.4	Modello D_3Q_{19}	25
3.5	Nodo solido appartenente al contorno.	28
3.6	No-Slip: Risultante delle funzioni di distribuzione post-propagazione [M. C. Sukop 2005].	29
3.7	Nodo solido appartenente al contorno [Q. Zou 1997], le funzioni di distribuzione incognite sono evidenziate in rosso	30
3.8	CC per modello D_3Q_{15} : viene considerato un nodo centrato in 0 appartenente al contorno solido. Le funzioni di distribuzione evidenziate in nero risultano note, mentre quelle in rosso sono incognite [Q. Zou 1997].	32
3.9	Free-Slip: Riflessione su contorno solido in assenza di attrito.	33
3.10	Condizione al contorno tipo inlet-outlet: in rosso sono evidenziate le incognite del problema	34
4.1	Tipologie di scarichi di superficie [Khatsuria 2005]: [A,B,C,D] = Tipologia di opere; [1=low . . . 5 = high] = Condizioni del tirante a monte dell'opera	36
4.2	Opera idraulica di dissipazione mediante rialto idraulico a valle dello sfioratore di superficie [Khatsuria 2005].	37
4.3	Dissipatore a "filtro" costituito da macroscabrezze poste lungo la sezione longitudinale [Khatsuria 2005].	38
4.4	Sezione longitudinale dello sfioratore di superficie a salto di sci.	38
4.5	Sezione lungo il piano [X Y] dello sfioratore di superficie a salto di sci.	39
4.6	Risoluzione mediante metodo standard del profilo di rigurgito a valle dello sfioratore utilizzando i dati di Tab.4.1.	39
4.7	Gittata provocata dal salto di sci [Khatsuria 2005].	40
4.8	Relazione empirica che simula l'azione resistente dell'aria [Kawakami 1971].	40
5.1	Geometria 3D del dominio di calcolo finale	44
5.2	Geometria della simulazione 1 \rightarrow Sezione piano [X Z].	47

5.3	<i>Geometria della simulazione 1 → Sezione piano [X Y].</i>	47
5.4	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	48
5.5	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	48
5.6	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	49
5.7	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	50
5.8	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	50
5.9	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	50
5.10	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	51
5.11	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	51
5.12	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	51
5.13	<i>Geometria della simulazione 2 → Sezione piano [X Y].</i>	53
5.14	<i>Geometria della simulazione 2 → Sezione piano [X Z].</i>	53
5.15	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	55
5.16	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	55
5.17	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	55
5.18	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	56
5.19	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	56
5.20	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	56
5.21	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	57
5.22	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	58
5.23	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	58
5.24	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	59
5.25	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	59
5.26	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	59
5.27	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	60
5.28	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	60
5.29	<i>Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	60
5.30	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	61
5.31	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	61
5.32	<i>Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	61
5.33	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	62
5.34	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	62
5.35	<i>Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	62
5.36	<i>Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi</i>	63
5.37	<i>Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi</i>	63
5.38	<i>Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi</i>	63
6.1	<i>Variazione temporale dell'area della superficie libera entrante nella vasca di dissipazione a quota 4m O.TW.L.</i>	64
6.2	<i>Variazione temporale dell'area della superficie libera entrante nella vasca di dissipazione a quota 4m O.TW.L.</i>	64

6.3	<i>Variazione temporale della velocità d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4m O.TW.L.</i>	65
6.4	<i>Variazione temporale della velocità d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.</i>	65
6.5	<i>Variazione temporale dell'angolo d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.</i>	66
6.6	<i>Variazione temporale dell'angolo d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.</i>	66
6.7	<i>Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -9$ m O.TW.L.</i>	66
6.8	<i>Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -9$ m O.TW.L.</i>	66
6.9	<i>Andamento temporale del modulo di velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -8$ m O.TW.L.</i>	67
6.10	<i>Andamento temporale del modulo di velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -8$ m O.TW.L.</i>	67
6.11	<i>Andamento nel tempo della variazione dell'area di impatto A_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L. . .</i>	68
6.12	<i>Andamento nel tempo della variazione dell'angolo di impatto α_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L. . .</i>	68
6.13	<i>Andamento nel tempo della variazione dell'angolo di impatto α_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L. . .</i>	69
6.14	<i>Andamento nel tempo della variazione della pressione dinamica sul fondo della vasca di dissipazione p_b nelle due simulazioni effettuate preliminarmente.</i>	69
6.15	<i>Andamento nel tempo della variazione del modulo della velocità fondo della vasca di dissipazione v_b nelle due simulazioni effettuate preliminarmente.</i>	70
6.16	<i>Piano di ispezione posto in corrispondenza della superficie libera della vasca di dissipazione. $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	71
6.17	<i>Piano di ispezione posto in corrispondenza della superficie libera della vasca di dissipazione. $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	71
6.18	<i>Area adimensionalizzata su A_0; $Z = 0$ m O.TW.L.</i>	72
6.19	<i>Area adimensionalizzata su A_0; $Z = 0$ m O.TW.L.</i>	72
6.20	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 15$ m; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	72
6.21	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 15$ m; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	72
6.22	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 20$ m; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73
6.23	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 20$ m; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73
6.24	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 25$ m; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73
6.25	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 25$ m; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73
6.26	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 30$ m; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73
6.27	<i>α_i distanza dalla mezzeria $y = 30$ m; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$</i>	73

6.28	α_i distanza dalla mezzeria $y = 35$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	74
6.29	α_i distanza dalla mezzeria $y = 35$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	74
6.30	Dati medi dell'angolo d'impatto $\alpha_{i,avg}$; $Q = 13200$ m ³ /s	74
6.31	Dati medi dell'angolo d'impatto $\alpha_{i,avg}$; $Q = 11000$ m ³ /s	74
6.32	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 15$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	75
6.33	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 15$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	75
6.34	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 20$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	76
6.35	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 20$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	76
6.36	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 25$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	76
6.37	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 25$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	76
6.38	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 30$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	76
6.39	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 30$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	76
6.40	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 35$ m; $Q = 13200$ m ³ /s	77
6.41	L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 35$ m; $Q = 11000$ m ³ /s	77
6.42	Grafico riassuntivo della gittata generato dai valori medi definiti nei grafici precedenti per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	77
6.43	Grafico riassuntivo della gittata generato dai valori medi definiti nei grafici precedenti per $Q_2 = 11000$ m ³ /s	77
6.44	Grafico della velocità d'impatto media calcolata sull'intera area d'ingresso ad un'altezza di $z = 0$ m O.TW.L. - Simulazione effettuata con portata = 13200 m ³ /s	78
6.45	Grafico della velocità d'impatto media calcolata sull'intera area d'ingresso ad un'altezza di $z = 0$ m O.TW.L. - Simulazione effettuata con portata = 11000 m ³ /s	78
6.46	Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.	79
6.47	Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.	79
6.48	Andamento temporale della velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.	79
6.49	Andamento temporale della velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.	79
6.50	v_x ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.51	$\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.52	v_x ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.53	$\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.54	v_x ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.55	$\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	80
6.56	v_x ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	81
6.57	$\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	81
6.58	v_x ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	81
6.59	$\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m ³ /s	81

6.60	v_x ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	81
6.61	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	81
6.62	v_y ad una distanza $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.63	$\partial v_y/\partial y$ ad una distanza $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.64	v_y ad una distanza $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.65	$\partial v_y/\partial y$ ad una distanza $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.66	v_y ad una distanza $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.67	$\partial v_y/\partial y$ ad una distanza $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	82
6.68	v_y ad una distanza $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	83
6.69	$\partial v_y/\partial y$ ad una distanza $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	83
6.70	v_y ad una distanza $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	83
6.71	$\partial v_y/\partial y$ ad una distanza $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	83
6.72	v_x ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.73	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.74	v_x ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.75	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.76	v_x ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.77	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	84
6.78	v_x ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.79	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.80	v_x ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.81	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.82	v_x ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.83	$\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	85
6.84	v_y a $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.85	$\partial v_y/\partial y$ a $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.86	v_y a $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.87	$\partial v_y/\partial y$ a $X = 110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.88	v_y a $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.89	$\partial v_y/\partial y$ a $X = 120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	86
6.90	v_y a $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	87
6.91	$\partial v_y/\partial y$ a $X = 130$ m dalla fine dello salto di sci	87
6.92	v_y a $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	87
6.93	$\partial v_y/\partial y$ a $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	87
6.94	Grafico cumulativo dei dati sopraesposti rappresentante il fronte di inizio deposizione.	87
6.95	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	88
6.96	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	89
6.97	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	89
6.98	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	90
6.99	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	90

6.100	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$. .	91
6.101	Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$. .	91
6.102	Andamento spaziale delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	91
6.103	Andamento spaziale della derivata delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$	92
6.104	Andamento spaziale delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	92
6.105	Andamento spaziale della derivata delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$	93
6.106	Analisi comparativa tra l'impronta di scavo e l'ingresso del fluido per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$.	94
6.107	Analisi comparativa tra l'impronta di scavo e l'ingresso del fluido per $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$.	94

Elenco delle tabelle

3.1	Caratteristiche dei modelli Lattice Boltzmann [Z. Guo 2013]	26
4.1	Valori del dominio allo studio	39
4.2	Valori derivanti dalla risoluzione della (4.1) mediante "metodo predictor-corrector" [DiRisio 2014] al variare delle portata in ingresso.	41
4.3	X_i con $i = [\text{bottom}, \text{top}]$ = gittata al variare del tirante e X_{ir} la gittata risultante considerando l'interazione con l'aria.	41
5.1	Descrizione simulazioni effettuate	46
5.2	Parametri della Simulazione 1	48
5.3	Parametri della Simulazione 1	52
5.4	Parametri della Simulazione 3	57

INTRODUZIONE

Le soluzioni ad un problema ingegneristico differiscono dall'univocità date le molteplici vie di persecuzione dell'obiettivo finale. Regolarmente però l'approccio alla strategia di risoluzione passa attraverso quattro possibili strumenti:

- Modelli Analitici
- Modelli Numerici
- Modelli Fisici
- Misure di campo

La sinergia fra di essi, quando possibile ed economicamente sostenibile, porta ad una caratterizzazione e soluzione del problema ingegneristico ben posta. Facendo convergere l'attenzione sui modelli numerici, essi intendono rappresentare la realtà fisica attraverso approssimazioni rese necessarie dall'insufficiente conoscenza del fenomeno in oggetto. Una prima distinzione tra di essi avviene in relazione alla rappresentazione delle dimensioni spaziali, secondo cui nasce la suddivisione in modelli

- Monodimensionali
- Bidimensionali
- Tridimensionali

I moderni *Lattice-Boltzmann Methods* appartengono a quest'ultima categoria. Implementati nel codice di calcolo *Palabos*, il modello LB è stato utilizzato per la valutazione delle caratteristiche idrodinamiche del getto generato da uno sfioratore di superficie a salto di sci, posto a servizio di dighe e corredato di vasca di dissipazione.

Il modello *Lattice-Boltzmann* trae le sue origini dai modelli *Lattice Gas Cellular Automata* nati agli inizi degli anni '70. Viene utilizzato come alternativa ai modelli di discretizzazione delle equazioni del continuo per la risoluzione delle equazioni di *Navier-Stokes*, imponendo un approccio su scala *mesoscopica*: partendo da relazioni cinetiche a scala microscopica, si risale alle proprietà macroscopiche del fluido. Lo studio a scala microscopica impone la rappresentazione matematica della geometria particellare che viene implementata in questi modelli con *reticoli caratteristici*, ragion per cui vengono denominati *Modelli Reticolari*.

In funzione della dimensione e proprietà del reticolo, diversi modelli reticolari si differenziano attraverso gli acronimi $D_m Q_n$, in cui D_m caratterizza la dimensione del reticolo e le Q_m caratterizzano le funzioni di distribuzione di velocità. La panoramica delle equazioni descrittive del modello viene proposta, senza presunzione di completezza, nei capitoli successivi. Le stesse sono state implementate nel codice di calcolo *Palabos*, che si basa sulle librerie scritte in C++ prodotte dalla *Flowkit Ltd.* nell'ambito della computazione fluidodinamica (CFD).

Mediante l'utilizzo di tale codice di calcolo, validato dai due lavori di tesi [Celli 2014], [Prisco 2015], è stato possibile centrare lo studio sulla valutazione delle proprietà idrodinamiche di interesse. Considerando le dimensioni in scala prototipo dell'opera idraulica in esame, si è passati alla definizione di condizioni al contorno finalizzate alla riduzione del dominio di calcolo.

La conseguente analisi temporale delle caratteristiche idrodinamiche all'ingresso del getto nella vasca di dissipazione, ha permesso la stima delle dimensioni dello scavo. Attraverso l'equazione di *Exner* sono state valutate le possibili zone di erosione del fondo della vasca di dissipazione, correlandole all'andamento spaziale della variazione delle velocità tangenziali su un piano posto a 10 m al disotto della superficie libera della vasca di dissipazione. Di seguito, vengono riassunti brevemente i temi trattati nei capitoli seguenti:

Capitolo 2 → Concisa revisione bibliografica sull'evoluzione del modello Lattice-Boltzmann tracciando un excursus sugli antesignani del modello.

Capitolo 3 → Descrizione non esaustiva dei concetti fisici e matematici su cui si basa il modello di computazione fluidodinamica LB.

Capitolo 4 → Introduzione alla descrizione dell'opera idraulica di studio.

Capitolo 5 → Implementazione del codice di calcolo al caso di studio, descrizione della geometria in esame e caratterizzazione delle simulazioni effettuate.

Capitolo 6 → Panoramica dei risultati idrodinamici ottenuti dalle simulazioni.

Capitolo 7 → Analisi e discussione dei risultati ottenuti.

EVOLUZIONE DEL MODELLO

Il metodo Lattice Boltzmann (LBM) fonda le sue basi sul modello degli automi cellulari, formalmente introdotti nel 1986 da Stephen Wolfram e basati su logica booleana. Successivamente McNamara e Zanetti introdussero una nuova versione del metodo basata su funzioni di probabilità sostituendo la logica booleana e consentendo di superare i problemi legati alla stabilità delle simulazioni [Succi 2001]. Le equazioni Lattice Boltzmann (LBE) appartengono ad una scala *mesoscopica* che, basandosi su un modello microscopico riesce a definire l'evoluzione macroscopica. Tale particolarità consente di studiare fenomeni discontinui, continui e idrodinamici.

2.1 Cellular Automata

Le basi dei modelli numerici ad evoluzione autonoma derivano dalla brillante intuizione di descrivere digitalmente ciò che in natura evolve spontaneamente. Dalla metà del XX secolo lo studio effettuato da matematici come John von Neumann ed Ulam, portarono alla definizione dei primi *Automi Cellulari*, allora sotto il nome di *spazi cellulari* [Wolfram 1986]. L'idea alla base fu quella di approssimare qualunque sistema fisico, descrivibile da equazioni differenziali, ad automi cellulari.

Metemanticamente, l'idealizzazione di sistemi fisici avviene attraverso la discretizzazione delle variabili spazio-temporali e la descrizione delle proprietà fisiche attraverso un set finito di valori discreti. Le caratteristiche degli spazi digitali evolvono spontaneamente in relazione alle condizioni iniziali contenute al loro interno ed all'interazione con le celle vicine. Emblematico è il modello *Life* nato negli anni '70 da Conway, il quale simula un automa cellulare in campo bidimensionale che, partendo da condizioni iniziali note, evolve in relazione alla somma dei valori delle celle vicine. Le regole di evoluzione sono essenzialmente due:

- La vita di una cella è alimentata dalla presenza di due o tre celle vicine vive.
- Una cella morta torna in vita solo se ha tre celle vicine vive.

Nonostante gli Automi Cellulari siano modelli estremamente semplici, hanno avuto un vasto campo di applicazione come dimostra l'evoluzione nella nascita dei modelli lattice gas per lo studio di fenomeni fluidodinamici.

2.2 Lattice Gas Cellular Automata

Con il termine Lattice Gas Cellular Automata (LGCA) si identifica un sistema di particelle in moto con velocità discrete, in grado di spostarsi da un nodo all'altro dello spazio che viene discretizzato regolarmente in forma reticolare. Tale modello si discosta dai Cellular Automata in relazione alle diverse regole di evoluzione costituite da una fase di *collisione* ed di *propagazione*. Nel seguito verrà proposta l'evoluzione del modello bidimensionale dei LGCA.

2.2.1 Il modello HPP

Il primo modello LGCA fu proposto nel 1973 da Hardy, de Pazzis e Pomeau, da cui il nome del modello derivante dalle iniziali dei tre ricercatori. Il modello è bidimensionale e si basa su una geometria quadrata (*square lattice*) in cui le particelle, disposte sui vertici dei singoli quadrati costituenti il piano (Fig.2.1), si spostano in un intervallo di tempo discretizzato occupando nuove posizioni, mantenendo costante il numero di particelle e la quantità di moto [Rothman e Zaleski 1994].

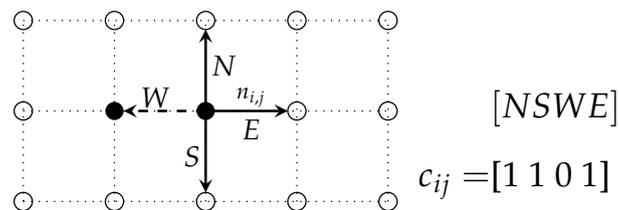


Figura 2.1: Reticolo 2D a celle quadrate con nodi di coordinate $n_{i,j}$ e velocità della particella c_{ij}

Ciascuna particella presente nel piano bidimensionale occupa un nodo di coordinate $n_{i,j}$, ognuno di essi connesso ai quattro nodi adiacenti che definiscono altri spazi cellulari quadrati come mostrato in Fig.2.1. Il campo di moto bidimensionale sul reticolo quadrato è descritto dalle velocità c_{ij} derivante dalla somma delle velocità verso i nodi limitrofi. Le c_{ij} sono calcolate come rapporto tra le direzioni del reticolo e l'intervallo temporale discreto, solitamente fissato unitario. La semplicità del modello bidimensionale permette una rappresentazione booleana delle velocità mediante un vettore contenente le quattro possibili direzioni di $[N \ S \ E \ W]$, componendo il vettore velocità c_{ij} . Lo spostamento delle particelle è regolato dal *Principio di esclusione di Pauli* il quale impone l'occupazione esclusiva di una particella in ogni nodo $n_{i,j}$. Analizzando l'evoluzione del sistema le due componenti considerate sono:

- *Collisione*: Ogni particella $n_{i,j}$ immersa nel reticolo piano, assume una nuova configurazione in uscita secondo le regole di collisione dettate dalle condizioni iniziali delle singole.
- *Propagazione*: Le particelle $n_{i,j}$ scorrono verso le possibili direzioni della griglia assumendo una nuova configurazione iniziale che tiene memoria dell'evoluzione precedente.

Nonostante le due fasi di evoluzione del sistema garantiscano le condizioni di continuità e di conservazione della quantità di moto, non è possibile addivenire alle equazioni di Navier-Stokes. Ciò è imputabile al non adeguato grado di simmetria del reticolo quadrato imposto.

La finalità del metodo non aveva infatti l'obiettivo di studiare modelli idrodinamici, bensì della risoluzione dei problemi di meccanica statistica [Rothman e Zaleski 1994].

2.2.2 Il modello FHP

Con l'obiettivo di creare un modello in grado di descrivere processi fluidodinamici, i ricercatori U. Frisch, B. Hasslacher e Y. Pomeau [Pomeau 1986] compresero di dover implementare la simmetria della griglia di calcolo, introducendo un lattice a forma triangolare con simmetria esagonale Fig.2.2

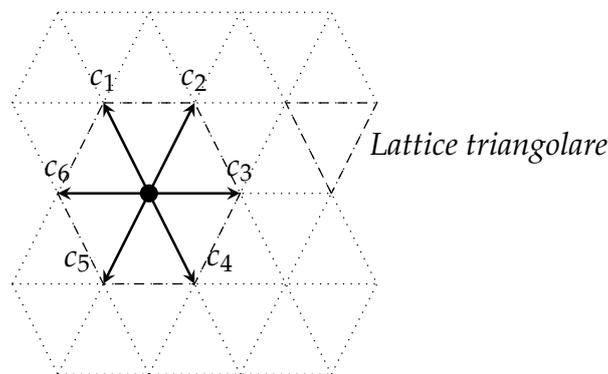


Figura 2.2: Il reticolo triangolare del modello FHP con simmetria esagonale. I vettori c_i rappresentano le velocità reticolari

Le velocità sono ottenute dal rapporto tra le direzioni di griglia e l'intervallo di tempo discreto, generalmente fissato unitario, in modo tale che abbiano gli stessi valori numerici delle direzioni, seppur dimensionalmente differenti. Considerando le particelle di massa unitaria, le velocità esprimono anche la quantità di moto. L'interazione tra le particelle del reticolo avviene secondo regole di collisione che associano ad ogni possibile combinazione in input, uno stato di output. La collisione può quindi:

- Assegnare una particella ad un link
- Togliere una particella da un link
- Lasciare il link inalterato

rispettando il principio di continuità (il numero di particelle in un nodo non cambia durante la collisione). Poiché le regole di collisione del modello FHP consentono solo alcune possibili collisioni evidenziate dalla Fig.2.3, ne deriva che l'evoluzione prospettata non risulta deterministica.

Come nel modello HPP precedente, la regola di collisione del modello FHP condivide due proprietà necessarie ma non sufficienti per la descrizione di fenomeni fluidodinamici: *conservazione della massa* e *conservazione della quantità di moto*. Queste proprietà sono tenute in conto

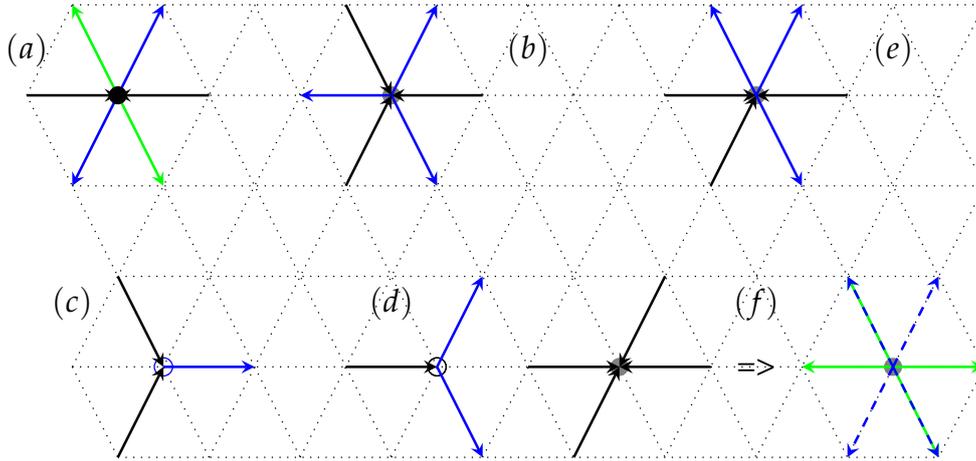


Figura 2.3: Collisioni nel metodo FHP [Succi 2001]

dai tre modelli FHP analizzati brevemente:

- FHP - I: Modello costituito dalle sole regole di collisione tra due o tre particelle [Fig.2.3 (a e b)] senza considerare possibili particelle ferme all'interno del nodo.
- FHP - II: Introduce la possibilità aggiuntiva di poter trovare una particella ferma nel nodo [Fig.2.3 (c e d)].
- FHP - III: Introduce la possibilità di avere più link occupati.

Approccio Microdinamico

L'evoluzione microdinamica del sistema risulta la seguente:

$$n_i(t+1, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i) - n_i(t, \mathbf{r}) = \Delta_i[n(t, \mathbf{r})] \quad (2.1)$$

in cui $n_i(t, \mathbf{r})$ coincide con il *vettore booleano* di presenza/assenza della particella definito nel seguente modo:

$$n_i(t, \mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & \text{se la posizione è occupata} \\ 0 & \text{se posizione è vuota} \end{cases}$$

Le velocità unitarie o direzioni di griglia \mathbf{c}_i che collegano ciascun nodo agli adiacenti, si calcolano come di seguito:

$$\mathbf{c}_i = \left(\cos \frac{\pi}{3} i, \sin \frac{\pi}{3} i \right), \quad i = 1, \dots, 6$$

Da notare che nel secondo membro dell'equazione (2.1) compare l'*operatore di collisione* che, descrivendo la variazione delle grandezze booleane del vettore $n_{i,j}$, può assumere i seguenti valori:

$$\Delta_i = \begin{cases} 1 & \text{se la particella giunge al nodo con velocità } \mathbf{c}_i \\ 0 & \text{se la particella rimane ferma} \\ -1 & \text{se la particella esce dal nodo con velocità } \mathbf{c}_i \end{cases}$$

e nello stesso tempo deve soddisfare le seguenti condizioni che garantiscono le proprietà macroscopiche del flusso:

$$\sum_{i=1}^6 \Delta_i = 0 \quad (2.2)$$

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i \Delta_i = 0 \quad (2.3)$$

Dalle due proprietà macroscopiche (2.2) e della quantità di moto (2.3) si perviene all'equazione di *conservazione della massa* tramite la sommatoria della (2.1):

$$\sum_{i=1}^6 n_i(t+1, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i) = \sum_{i=1}^6 n_i(t, \mathbf{r}) \quad (2.4)$$

Dalle stesse considerazioni si ottiene l'equazione di *conservazione della quantità di moto*:

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i n_i(t+1, \mathbf{r} + \mathbf{c}_i) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i n_i(t, \mathbf{r}) \quad (2.5)$$

Approccio Macrodinamico

É possibile ricavare le proprietà macroscopiche dei fluidi ricorrendo ad un approccio probabilistico. Secondo questa linea di azione Frisch et al. (1986) valutarono la probabilità media di trovare una particella nel sito \mathbf{r} al tempo t caratterizzata da una velocità \mathbf{c}_i . Tale probabilità corrisponde alla *media d'insieme* della variabile booleana $n_{i,j}$:

$$N_i = \langle n_i \rangle \quad (2.6)$$

che viene utilizzata per definire la *densità di massa* $\rho(\mathbf{r}, t)$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.7)$$

la *quantità di moto* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.8)$$

e la *velocità media* $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ come rapporto:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \quad (2.9)$$

Le equazioni di conservazione (2.4) (2.5) possono essere scritte anche a livello macroscopico mediante le quantità medie descritte precedentemente:

$$\sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_{i=1}^6 N_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

$$\sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r} + \mathbf{c}_i, t + 1) = \sum_{i=1}^6 \mathbf{c}_i N_i(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

Per un sistema in *equilibrio termodinamico*, il valore di ogni singola realizzazione N_i appartiene alla distribuzione statistica di *Fermi-Dirac*:

$$N_i^{eq} = \frac{1}{1 + e^{(h + \mathbf{q}\mathbf{c}_i)}} \quad (2.12)$$

In cui N_i^{eq} rappresenta la *popolazione media di equilibrio* ed h, \mathbf{q} *moltiplicatori di Lagrange* deducibili sfruttando le equazioni (2.7) e (2.8):

$$\rho = \sum_{i=1}^6 N_i = \sum_{i=1}^6 \frac{1}{1 + e^{(h + \mathbf{q}\mathbf{c}_i)}} \quad (2.13)$$

$$\rho \mathbf{u} = \sum_{i=1}^6 N_i \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^6 \frac{\mathbf{c}_i}{\mathbf{c}_i + e^{(h + \mathbf{q}\mathbf{c}_i)}} \quad (2.14)$$

Le equazioni (2.13) e (2.14) risultano derivabili solo in pochi casi attraverso una valutazione *multiscala* mostrata in dettaglio nel prossimo capitolo.

2.3 Difetti dei modelli lattice gas

Nonostante la capacità di descrivere l'evoluzione di sistemi fisici con una semplicità e velocità di calcolo elevata, i modelli LGCA presentavano alcuni difetti che spinsero i ricercatori ad affinare lo schema di base. In particolare il procedimento di derivazione delle equazioni di Navier-Stokes, a partire dal modello lattice gas, evidenzia effetti negativi relati alla:

- *Scelta della griglia di calcolo*

causa $\left\{ \begin{array}{l} \text{Mancanza di invarianza Galileiana} \\ \text{Anomala dipendenza della pressione del fluido dalla velocità} \end{array} \right.$

- *Discretizzazione dello spazio delle fasi*

causa $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rumore statistico} \\ \text{Alta viscosità (bassi numeri di Reynolds)} \\ \text{Complessità dell'operatore di collisione} \\ \text{Presenza di invarianti spurie} \end{array} \right.$

Le prime due anomalie dipendono dalla discretizzazione dello spazio delle velocità che porta ad un'espressione per le funzioni di equilibrio non in grado di restituire i corretti tensori di inerzia e pressione. L'invarianza Galileiana non risulta rispettata a causa della forte dipendenza delle pressioni dalle velocità.

Il *rumore statistico* è un problema intrinseco ai modelli LGCA nella descrizione dei valori macroscopici poiché si effettuano delle medie su un certo numero di punti; l'unico modo per ottenerne una riduzione presuppone la gestione di un numero cospicuo di dati. Nei modelli LGCA il massimo numero di Reynolds ammissibile dipende dall'entità e dalla modalità delle collisioni nell'unità di tempo che l'automa è in grado di simulare [Palpacelli 2005]. Poiché la gestione di tale sistema risultava molto onerosa, il calcolo poteva essere effettuato solo con fluidi ad *alta viscosità* o bassi numeri di Reynolds.

La *complessità dell'operatore di collisione* è evidente nel caso di simulazioni in tre dimensioni spaziali: il numero di link da gestire è così elevato da richiedere un tempo di calcolo inaccettabile. La simulazione di comportamenti sistema fluido non conforme all'evoluzione reale è imputabile alle cosiddette *invarianti spurie*, intrinsecamente legate alla griglia di calcolo.

I MODELLI LATTICE BOLTZMANN

L'incentivo alla risoluzione delle problematiche intrinseche negli LGCA porta alla definizione di modelli che, seppur ereditando le caratteristiche principali di semplicità e velocità di calcolo, da essi si sono gradualmente allontanati ed affermati come strumento autonomo per la simulazione dei fluidi.

La prima equazione Lattice Boltzmann (LBE) fu proposta da McNamara e Zanetti 1988 utilizzando la distribuzione continua di Fermi-Dirac per definire lo stato del singolo nodo $n_{i,j}$, sostituendo la variabile discreta booleana e riducendo notevolmente il rumore statistico che affliggeva i modelli LGCA. La successiva equazione di Higuera agiva sulla linearizzazione dell'operatore di collisione riducendo la complessità di calcolo. Fu però l'intuizione di Higuera, Succi e Benzi (1989) di definire l'operatore di collisione come variabili di sistema che sancì il completo distacco dai modelli LGCA e che permise di effettuare simulazioni anche con numeri di Reynolds alti.

L'affinamento dei modelli LB tramite la caratterizzazione della *distribuzione di Boltzmann* al posto della Fermi-Dirac, l'imposizione di differenti velocità reticolari e la descrizione dell'operatore di collisione tramite l'approssimazione BGK [Koelman 1991], permettono ai moderni LBMs di essere privi dei problemi esposti precedentemente [Wolf-Gladrow 2005]. Riassumendo, la genealogia dell'evoluzione dei LBMs può essere così schematizzata:

1976 -----> HPP
1986 -----> FHP
1988 -----> nlLBE
1989 -----> qlLBE – ecLBE
1991 – 92 -----> LBGK

Figura 3.1: Evoluzione schematica dei modelli LB (nl = non linear; ql = quasi-linear; ec = enhanced collision). [Succi 2001]

3.1 L'equazione di Boltzmann

I metodi che utilizzano l'unità lattice rappresentano una valida alternativa alla modellazione del comportamento dei sistemi fisici tramite approcci standad di tipo *top-down* o *bottom-up*. Il primo descrive fenomeni macroscopici continui risolvendo le equazioni alle derivate parziali

mediante metodi alle *differenze finite* o agli *elementi finiti*; il secondo è definito da equazioni che descrivono la dinamica molecolare (microscopica), ad esempio risolvendo l'equazione del moto di Newton.

Il metodo Lattice Boltzmann si interpone tra le due scale di osservazione valutando l'evoluzione del sistema fisico attraverso una scala *mesoscopica*. Trattando nello specifico un sistema fluido, è possibile studiarne la sua evoluzione dal punto di vista statistico utilizzando funzioni di distribuzione di probabilità $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$. Le variabili che definiscono tali funzioni hanno un valore reale compreso tra zero ed uno e risultano definite in modo tale che $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)d\mathbf{r}d\mathbf{c}$ sia il numero di particelle che nell'istante di tempo t si trovano nell'intorno di \mathbf{r} con velocità compresa tra \mathbf{c} e $\mathbf{c} + d\mathbf{c}$. Sotto l'ipotesi di continuità è possibile scrivere:

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{K}dt, t + dt)d\mathbf{r}d\mathbf{c} - f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = 0 \quad (3.1)$$

in cui \mathbf{K} è la forza esterna di massa agente sul sistema che determina una variazione di velocità da \mathbf{c} a $\mathbf{c} + \mathbf{K}$.

L'equazione (3.1) governa l'evoluzione del sistema nella sola fase di *propagazione* delle particelle lungo le traiettorie associate al campo di forza \mathbf{K} . Nel considerare collisioni intermolecolari, la variazione delle funzioni di distribuzione è regolata dall'operatore di collisione $C(f, f)$, che nell'equazione (3.2) è presente con la notazione $C(f, f)d\mathbf{r}d\mathbf{c}dt$:

$$f(\mathbf{r} + \mathbf{c}dt, \mathbf{c} + \mathbf{K}dt, t + dt)d\mathbf{r}d\mathbf{c} - f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) = C(f, f)d\mathbf{r}d\mathbf{c}dt \quad (3.2)$$

La (3.2) risulta formalmente simile all'equazione (2.1), ottenuta sostituendo le funzioni di distribuzione di velocità reticolari con le variabili booleane. È possibile ricavare l'*equazione continua di Boltzmann* dividendo la (3.2) per $d\mathbf{r}d\mathbf{c}dt$ e facendo tendere al limite $dt \rightarrow 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{K} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{c}} = C(f, f) \quad (3.3)$$

Dai momenti delle funzioni di distribuzione della (3.3) è possibile ricavare le grandezze macroscopiche di *densità*, *quantità di moto* ed *energia interna* definite come di seguito:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int m f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (3.4)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int m \mathbf{c} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (3.5)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int m \mathbf{u}_0^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (3.6)$$

Nelle quali m è la massa della singola particella, \mathbf{u}_0 rappresenta la sua velocità peculiare e

l'energia interna e deriva dalla teoria cinetica dei gas:

$$\mathbf{e} = \frac{3}{2m} k_b T \quad (3.7)$$

in cui k_b è la costante di Boltzmann e la T è la temperatura.

3.2 L'operatore di collisione

L'evoluzione del sistema può essere studiata cercando la soluzione dell'equazione di Boltzmann (3.3), la quale richiede la definizione dell'espressione relativa all'operatore di collisione $C(f, f)$. Ipotizzando urti elastici tra le particelle, l'operatore $C(f, f)$ gode delle seguenti proprietà:

$$\int \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^2 \end{bmatrix} C(f, f) d\mathbf{c} = 0 \quad (3.8)$$

Definendo l'invariante di collisione $\psi(\mathbf{c})$ tramite la relazione (3.9):

$$\int \psi_i C(f, f) d\mathbf{c} = 0 \quad (3.9)$$

si può dimostrare che l'operatore di collisione ammette cinque invarianti di collisione elementari, ψ_i con $i = 0, \dots, 4$, proporzionali alle tre grandezze macroscopiche come mostrato dalla seguente suddivisione:

- $\psi_0 = 1 \rightarrow$ proporzionale alla massa.
- $\psi_{1,2,3} = \mathbf{c}_{1,2,3} \rightarrow$ proporzionale alla quantità di moto.
- $\psi_4 = \mathbf{c}^2 \rightarrow$ proporzionale all'energia cinetica.

Ogni altro invariante di collisione può essere scritto come combinazione lineare degli invarianti elementari [Palpacelli 2005] secondo la (3.10)

$$\psi(\mathbf{c}) = A_0 + A_{1,2,3}\mathbf{c} + A_4\mathbf{c}^2 \quad (3.10)$$

dove $A_0, A_{1,2,3}$ e A_4 sono i cinque moltiplicatori di Lagrange, di solito definiti come funzioni della densità ρ e della quantità di moto $\rho\mathbf{c}$ utilizzando le relazioni di conservazione booleane (2.3) (2.2).

L'evoluzione temporale della funzione di distribuzione di una singola particella f_i viene definito come concatenazione delle funzioni di distribuzione delle particelle adiacenti, per cui la



Figura 3.2: Pre e Post-collisione tra due particelle di massa uguale riferita al centro di massa.

definizione dell'operatore di collisione $C(f, f)$ risulta complessa. Una notevole semplificazione deriva dall'analisi di un sistema fluido a bassa densità di particelle, in cui sono ammesse solo collisioni binarie; in questo modo viene esclusa la correlazione tra le particelle. Formalmente si può scrivere:

$$f_{12} = f_1 \cdot f_2$$

in cui f_{12} esprime la probabilità di trovare allo stesso istante t la particella (1) nell'intorno di \mathbf{r}_1 con velocità \mathbf{c}_1 e la particella (2) nell'intorno della posizione \mathbf{r}_2 con velocità \mathbf{c}_2 . Sulla base di queste assunzioni teoriche, si dimostra che la funzione $C(f, f)$ rappresentativa delle collisioni intermolecolari risulta essere:

$$C(f, f) = \iint [f'_1 f'_2 - f_1 f_2] \zeta_c \sigma(\theta, \zeta_c) d\Omega d\mathbf{c}_2 \quad (3.11)$$

in cui

$$f'_1 = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}'_1, t)$$

$$f'_2 = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{c}'_2, t)$$

$$f_1 = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, t)$$

$$f_2 = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{c}_2, t)$$

dove \mathbf{c}'_1 e \mathbf{c}'_2 sono le velocità primitive ammissibili post-collisione; ζ_c è il modulo della velocità relativa delle due particelle

$$\zeta_c = |\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2|$$

θ coincide con l'angolo d'impatto mostrato nella Fig.3.2; $d\Omega$ denota l'angolo solido in cui le particelle si propagano;

$$d\Omega = \sin(\theta) d\theta d\phi$$

$\sigma(\zeta_c, \theta)$ rappresenta la distanza trasversale tra le particelle riferita al centro di massa:

$$\sigma(\zeta_c, \theta) = \frac{b(\zeta_c, \theta) db}{\sin \theta d\theta}$$

in cui b definisce il parametro di impatto Fig.3.2.

3.2.1 Rilassamento verso l'equilibrio

La complessità nella definizione dell'operatore di collisione viene superata introducendo la *funzione di distribuzione di equilibrio locale* f^{eq} che descrive l'evoluzione spontanea di un sistema verso uno stadio di equilibrio caratterizzato da un valore di entropia massimo; tale imposizione viene definita *rilassamento verso l'equilibrio*. La funzione f^{eq} è definita imponendo la condizione:

$$C(f^{eq}, f^{eq}) = 0 \quad (3.12)$$

Dalla relazione (3.12), utilizzando la definizione (3.11), si ricava la condizione di bilancio delle collisioni:

$$f_1' f_2' = f_1 f_2 \quad (3.13)$$

La (3.13) esprime una condizione di *equilibrio dinamico* tra le collisioni dirette ($1' \rightarrow 1; 2' \rightarrow 2$) e indirette ($1 \rightarrow 1'; 2 \rightarrow 2'$). Applicando il logaritmo ambo i membri alla (3.13) ed utilizzando le relazioni (3.8), si intuisce che $\ln f$ rappresenta un invariante aggiuntivo di collisione calcolabile in virtù della relazione (3.10). Formalmente si ha:

$$\ln f = A_0 + A_{1,2,3} \cdot \mathbf{c} + A_4 \cdot \mathbf{c}^2 \quad (3.14)$$

Definendo i coefficienti di Lagrange A_0 , $A_{1,2,3}$ e A_4 con l'imposizione della conservazione delle grandezze macroscopiche del flusso [(3.4), (3.5), (3.6)] e togliendo il logaritmo alla (3.14), risulta semplice ricavare la seguente relazione:

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{c}) = Z(\mathbf{r}) e^{-\frac{m(\mathbf{c}-\mathbf{u}(\mathbf{r}))^2}{2k_b T(\mathbf{r})}} \quad (3.15)$$

Tuttavia tale funzione di distribuzione non è rappresentativa dello stato di equilibrio a causa della dipendenza dal vettore spaziale \mathbf{r} . Si deduce quindi:

$$f^{eq}(\mathbf{c}) = Z e^{-\frac{m(\mathbf{c}-\mathbf{u}_0)^2}{2k_b T}} \quad (3.16)$$

in cui si definisce la velocità peculiare delle particelle $\mathbf{u} = (\mathbf{c} - \mathbf{u}_0)$ e Z rappresenta un'opportuna costante di normalizzazione ottenuta integrando l'espressione f^{eq} su un dominio finito. Riassumendo si ottiene la *funzione di distribuzione di Maxwell-Boltzmann delle velocità*:

$$f^{eq} = \frac{\rho}{m} \left(\frac{m}{2\pi k_b T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m\mathbf{u}^2}{2k_b T} \right] \quad (3.17)$$

La (3.17) risulta essere l'unica distribuzione analitica che permetta in modo relativamente semplice, secondo le leggi della fisica classica, di connettere grandezze termodinamiche e dinamica microscopica [D'Alfonso 1981].

3.3 Approssimazione BGK

Uno dei maggiori problemi dell'utilizzo dell'equazione di Boltzmann risiede nella natura non lineare dell'operatore delle collisioni $C(f, f)$. Riprendendo il lavoro svolto nel 1954 da Bhatnagar, Gross e Krook, si pensò di sostituire l'operatore $C(f, f)$ con un operatore linearizzato $\Omega(f)$ così descritto:

$$\Omega(f) = \omega(f^{eq} - f) = \frac{1}{\tau}(f^{eq} - f) \quad (3.18)$$

in cui $\omega = 1/\tau$ rappresenta la frequenza delle collisioni e τ il *tempo di rilassamento*, ossia la variazione temporale tra una collisione e l'altra. L'operatore (3.18) deve soddisfare le relazioni

$$\int \psi_i \Omega(f) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{c} = 0 \quad \text{per } (i = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.19)$$

$$\int \ln f \Omega(f) d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{c} \leq 0 \quad (3.20)$$

che impongono la conservazione degli invarianti di collisione ψ_i (3.19) e la tendenza a rispettare il teorema di massima entropia (3.20). Dall'equazione di Boltzmann (3.3) sostituendo l'approssimazione BGK (3.18) si arriva alla definizione del modello Lattice Boltzmann con approssimazione BGK dell'operatore delle collisioni (LBGK).

3.4 Conservazione delle proprietà macroscopiche

Perseguendo l'obiettivo di definire le proprietà del fluido presenti nella (3.17), bisogna effettuare un'analisi a livello macroscopico. A tal fine si considera un sistema continuo trascurando la struttura molecolare e le interazioni tra le particelle. Le informazioni sulle caratteristiche microscopiche sono contenute nei coefficienti di viscosità e conduttività termica.

La *densità* per unità di volume è rappresentata dall'integrale della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$ rispetto alle possibili velocità:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \cdot \int f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} = m \cdot n(\mathbf{r}, t) \quad (3.21)$$

in cui m è la massa delle particelle e $n(\mathbf{r}, t)$ è il *numero di densità*. La *velocità macroscopica* del flusso risulta pari al valor medio delle singole particelle e definita:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{c}n(\mathbf{r}, t)}{n(\mathbf{r}, t)} \quad (3.22)$$

La *temperatura cinetica* trova la sua definizione nella formula:

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{Dn(\mathbf{r}, t)k_b} \mathbf{u}_0^2 n(\mathbf{r}, t) \quad (3.23)$$

É stato dimostrato di poter ricavare dall'equazione di Boltzmann (3.3) le equazioni di Navier-Stokes moltiplicandola gli invarianti di collisione $\psi_i(\mathbf{c})$ e integrando sullo spazio delle velocità locali delle possibili direzioni reticolari. Ricordando le proprietà dell'operatore di collisione (3.9), si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_k n(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} \psi_i c_i n(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3.24)$$

Conservazione della Massa

Imponendo $\psi = 1$ la (3.24) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} [n(\mathbf{r}, t) c_i] = 0 \quad (3.25)$$

osservando le definizioni di densità (3.21) e velocità macroscopica (3.22) si ottiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.26)$$

Conservazione della Quantità di Moto

Imponendo $\psi = c_j$ la (3.24) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) c_j c_i + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} n(\mathbf{r}, t) c_j c_i = 0 \quad (3.27)$$

Adottando la convenzione che $\mathbf{u} = \mathbf{c} + \tilde{\mathbf{c}}$, cioè che la velocità macroscopica del flusso sia generata dalla componente di velocità della particella e dalla sua deviazione casuale, si può scrivere che :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}_j) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} q_{ij} = 0 \quad (3.28)$$

in cui $j = 1, 2, 3$ e

$$q_{ij} = \rho c_i c_j + m \int \tilde{c}_i \tilde{c}_j d^3 c \quad (3.29)$$

Conservazione dell'Energia

Considerando l'ultimo invariante $\psi_4 = c_j^2$ la (3.24) risulta essere:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{u}_j \frac{\partial e}{\partial r_j} = \frac{\partial q_i}{\partial r_i} - p_{ij} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial r_i} \right) \quad (3.30)$$

in cui e rappresenta l'energia specifica (3.7), q_i il flusso di calore e p_{ij} il tensore delle pressioni.

$$q_i(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t) c_j^2 c_i \quad (3.31)$$

3.5 L'espansione di Chapman-Enskog

La (3.11) di Boltzmann è un'equazione integro-differenziale non lineare alle derivate parziali che presenta soluzioni in forma chiusa esclusivamente per funzioni di distribuzione di equilibrio Maxwelliane f^{eq} [Wolf-Gladrow 2005]; ciò che succede durante il transitorio è stimabile attraverso l'utilizzo di metodi approssimati.

Le equazioni atte alla descrizione di situazioni transitorie appartengono ad una famiglia di metodi risolutivi che si basano su *tecniche perturbative*: definendo un parametro ϵ sufficientemente piccolo, si espande f in una serie di potenze di ϵ .

$$f = f^0 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots + \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f^{(n)} \quad (3.32)$$

Analizzando l'espansione di Chapman-Enskog, la scelta del parametro ϵ ricade sul *numero di Knudsen* " Kn ", definito come il rapporto tra il *percorso medio libero* " λ " (distanza media tra due collisioni successive) e la *scala spaziale caratteristica del sistema* " L " (ad esempio il raggio di un ostacolo immerso in un flusso). Tale parametro, affinché caratterizzi fluidi viscosi descrivibili mediante le equazioni di Navier-Stokes, deve essere

$$Kn = \frac{\lambda}{L} < 0.01 \quad (3.33)$$

che racchiude la descrizione di flusso laminare, turbolento e misto. Il parametro di espansione ϵ è spesso usato con due significati diversi:

- come parametro per l'espansione in serie
- come parametro formale che permette di separare i termini che appartengono ai diversi ordini di grandezza.

Il secondo punto permette di considerare ϵ come un indice ed eliminarlo dal risultato finale, ponendolo uguale all'unità. Si sfrutta quindi l'espansione (3.32) per il calcolo delle derivate di f rispetto a ρ , c_i e T :

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \rho} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial \rho} + \epsilon^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial \rho} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial c_i} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial c_i} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial c_i} + \epsilon^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial c_i} + \dots$$

$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} + \epsilon \frac{\partial f^{(1)}}{\partial T} + \epsilon^2 \frac{\partial f^{(2)}}{\partial T} + \dots$$

L'analisi multi-scala viene effettuata prendendo in considerazione intervalli di tempo tali da individuare fenomeni differenti. Qualitativamente l'approccio all'equilibrio è controllato da tre scale temporali [Wolf-Gladrow 2005]:

- ϵ^0 ; rappresentativo della scala temporale in cui avviene il *rilassamento verso l'equilibrio locale*.
- ϵ^{-1} ; coincide con la scala temporale con cui avvengono *fenomeni perturbativi della densità di massa e l'avvezione*
- ϵ^{-2} ; scala temporale che caratterizza i *fenomeni diffusivi*

La scala gerarchica temporale appena descritta consente l'adozione della seguente rappresentazione multi-scala:

$$t = \epsilon^{-1}t_1 + \epsilon^{-2}t_2$$

$$r = \epsilon^{-1}r_1$$

Tale imposizione denota un'esclusiva scala spaziale ed una multiscala temporale che distingue fenomeni macroscopici, diffusivi e avvettivi. Si ha dunque:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial t_2} \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \epsilon \frac{\partial}{\partial r_1} \quad (3.35)$$

3.6 Da Boltzmann a Navier-Stokes: Espansione multi-scala

Adottando il formalismo (3.34) e (3.35) alle equazioni di conservazione (3.26); (3.28); (3.30) su ottiene [Wolf-Gladrow 2005]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_1} = - \frac{\partial \rho c_i}{\partial x_1} \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_{n+1}} = 0 \quad (n > 0)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t_1} = -c_j \frac{\partial c_i}{\partial r_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij(0)}}{\partial r_j} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial t_{n+1}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{ij(n)}}{\partial r_j} \quad (n>0)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t_1} = -c_j k_b^2 \frac{\partial T}{\partial r_j} - \frac{2k_b}{3\rho} \left(\frac{\partial q_{i_0} p_{ij(0)}}{\partial r_i} + p_{ij(0)} \Xi_{ij} \right) \quad (3.38)$$

dove

$$\Xi_{ij} = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right) \quad (3.39)$$

Allo stesso modo, si procede effettuando l'espansione multi-scala per l'integrale dell'operatore delle collisioni con approssimazione BGK (3.18) ottenendo:

$$\Omega(f) = -\omega(f - f^{(0)}) = -\omega(\epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots) \quad (3.40)$$

A questo punto si procede eguagliando i termini dello stesso ordine dell'equazione (3.40) con della di Boltzmann:

$$-\omega f^{(0)} = 0 \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t_1} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial r_{1i}} = -\omega f^{(1)} \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial f^{(1)}}{\partial t_1} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t_2} + c_i \frac{\partial f^{(1)}}{\partial r_{1i}} = -\omega f^{(2)} \quad (3.43)$$

L'equazione (3.41) soddisfa la condizione dell'operatore di collisione nullo in presenza di distribuzione maxwelliana $f^{(0)} = f^{eq}$, mentre dalla (3.42) si ricava il funzionale $f^{(1)}$:

$$f^{(1)} = -\frac{1}{\omega} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t_1} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial r_{1i}} \quad (3.44)$$

Procedendo con l'obiettivo di ricavare le equazioni di Navier-Stokes, si analizza il tensore delle pressioni $p_{ij(1)}$

$$p_{ij(1)} = m \int c_i c_j f^{(1)} d^3c = -\frac{m}{\omega} \int c_i c_j \left(\frac{\partial f^{(0)}}{\partial t_1} + c_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial r_{1i}} \right) d^3c \quad (3.45)$$

Sfruttando le relazioni (3.41), (3.42) ed integrando si ottiene [Wolf-Gladrow 2005]

$$p_{ij(1)} = \frac{-nk_b T}{\omega} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial c_x}{\partial x} & \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} & \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \\ \frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} & 2\frac{\partial c_y}{\partial y} & \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \\ \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} & \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} & 2\frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

La derivata rispetto alle variabili spaziali $\nabla \cdot p_{ij(1)}$, trascurando le variazioni di densità e temperatura, è ottenuta mediante:

$$\frac{\partial p_{ij(1)}}{\partial r_i} = \mu \left[\nabla^2 \mathbf{c} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (3.47)$$

avendo espresso con μ la viscosità dinamica

$$\mu = \frac{nk_b T}{\omega} \quad (3.48)$$

Ricordando la relazione di equilibrio locale $f^{(0)} = f^{(eq)}$ vale la seguente uguaglianza:

$$-\frac{\partial p_{ij(1)}}{\partial r_j} = -\frac{\partial p}{\partial r_i}$$

è possibile risalire alle equazioni di Navier-Stokes per fluidi incomprimibili non soggetti a forze esterne:

$$\frac{D\mathbf{c}}{Dt} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{c} \quad (3.49)$$

avendo definito la ν viscosità cinematica pari a μ/ρ .

3.7 L'equazione Lattice Boltzmann

L'equazione *Lattice Boltzmann* descrive l'evoluzione delle funzioni di distribuzione delle velocità all'interno dello spazio reticolare, permettendo di seguire il comportamento macroscopico dei fluidi. L'equazione microdinamica dei modelli LGCA (2.1) può essere ricavata come discretizzazione dell'equazione di Boltzmann (3.3); quest'ultima, in assenza di forza esterna agente, può essere scritta come:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla f = C(f, f) \quad (3.50)$$

Applicando l'approssimazione BGK (3.18) l'equazione di Boltzmann risulta:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{c} \nabla f = -\frac{1}{\tau} (f - f^{(eq)}) \quad (3.51)$$

in cui $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$. Lo spazio delle velocità viene discretizzato introducendo distribuzioni di velocità finite c_i e le relative funzioni di distribuzione spaziale $f_i(\mathbf{r}, t)$ ottenendo così l'equazione

i Boltzmann in forma discreta:

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{c}_i \nabla f_i = -\frac{1}{\tau} (f_i - f_i^{(eq)}) \quad (3.52)$$

Si procede attraverso un'adimensionalizzazione della (3.52) introducendo:

- L = scala di lunghezza caratteristica
- U = velocità di riferimento
- n_r = densità di riferimento
- t_c = tempo che intercorre tra le collisioni particellari

si perviene alla

$$\frac{\partial F_i}{\partial \tilde{t}} + \mathbf{v}_i \tilde{\nabla} F_i = -\frac{1}{\tilde{\tau} \epsilon} (F_i - F_i^{(eq)}) \quad (3.53)$$

in cui

$$v_i = \frac{c_i}{U} \quad \tilde{\nabla} = L \nabla \quad \tilde{t} = t \frac{U}{L} \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau}{t_c} \quad F_i = \frac{f_i}{n_r - i} \quad \epsilon = t_c \frac{U}{L}$$

Procedendo in una discretizzazione della (3.53) con un passo caratteristico $\Delta \tilde{t} = \Delta t \frac{U}{L}$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & \frac{F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) - F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})}{\Delta \tilde{t}} + \\ & + v_{ix} \frac{F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) - F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})}{\Delta \tilde{x}} + \\ & + v_{iy} \frac{F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) - F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})}{\Delta \tilde{y}} + \\ & + v_{iz} \frac{F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t} + \Delta \tilde{t}) - F_i(\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{t})}{\Delta \tilde{z}} = -\frac{1}{\tilde{\tau} \epsilon} (F_i - F_i^{(eq)}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Volendo descrivere il moto d'insieme del fluido, si adotta il formalismo Lagrangiano dividendo lo spazio reticolare per un intervallo temporale tale da eguagliare la velocità reticolare ($v_i = \Delta \tilde{\mathbf{r}} / \Delta \tilde{t}$):

$$F_i(\mathbf{r}_i + c_i \Delta t, t + \Delta t) - F_i(\mathbf{r}_i, t) = -\frac{1}{\tau} (F_i(\mathbf{r}_i, t) - F_i^{(eq)}(\mathbf{r}_i, t)) \quad (3.55)$$

La (3.55) coincide con l'equazione *Lattice Boltzmann* scritta in forma discreta secondo il formalismo Lagrangiano, in cui le grandezze spazio-temporali sono state scalate alle unità LB ($\Delta \mathbf{r}_i, \Delta t$) [Wolf-Gladrow 2005].

3.8 LBGK bidimensionale

La classificazione dei modelli Lattice Boltzmann viene effettuata mediante degli acronimi che identificano la dimensione spaziale dell'unità lattice D ed il numero di velocità discrete reticolari Q mediante il formalismo $D_n Q_m$. Per definire un LBM bisogna specificare tre elementi:

1. la griglia di calcolo e l'insieme delle velocità
2. la distribuzione di equilibrio
3. l'equazione cinetica

1.

Analizzando un modello bidimensionale con nove velocità discrete reticolari, si prende in considerazione il reticolo D_2Q_9 , ipotizzando valida la funzione di distribuzione maxwelliana di equilibrio (3.17) ed applicando l'approssimazione BGK all'operatore delle collisioni Ω per definire l'equazione cinetica. Un possibile modello Lattice Boltzmann che rispetta le caratteristiche sopra elencate è definito con le seguenti velocità c_i :

$$\begin{aligned} c_0^k &= (0, 0) \\ c_{1,2,3,4}^k &= (\pm a, \pm b) \\ c_{5,6}^k &= (\pm 2a, 0) \\ c_{7,8}^k &= (0, \pm 2b) \end{aligned}$$

in cui a e b devono rispettare la condizione $a^2/3 \leq b^2 \leq 3a^2$. La scelta particolare delle velocità [Koelman 1991] ricade su $a = b = 1/\sqrt{2}$ e porta ad avere delle velocità reticolari così definite:

$$\begin{aligned} c_0 &= (0, 0) \\ c_{1,3,3,4} &= (\pm c, 0) \\ c_{2,4} &= (0, \pm c) \\ c_{7,8} &= (\pm c, \pm c) \end{aligned} \tag{3.56}$$

Tali velocità possono essere usate in un unità lattice D_2Q_9 esclusivamente definita come in Fig.3.8

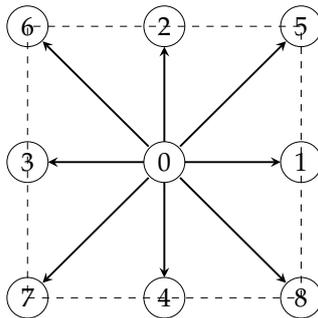


Figura 3.3: Modello Lattice Boltzmann D_2Q_9

La densità ρ e la quantità di moto \mathbf{j} sono definite come somma delle funzioni di distribuzione $F_i(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i F_i(\mathbf{r}, t) \tag{3.57}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \mathbf{c}_i F_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.58)$$

dove le $F_i(\mathbf{r}, t)$ rappresentano le funzioni di distribuzione delle velocità ottenute come somma delle W_i e di infinitesime perturbazioni $\epsilon_i(\mathbf{r}, t)$ tale che $|\epsilon_i(\mathbf{r}, t)| \ll W_i$

$$F_i(\mathbf{r}, t) = W_i + \epsilon_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.59)$$

2. La funzione di distribuzione di equilibrio globale è definita dalla distribuzione di Maxwell-Boltzmann (3.17), la cui espressione polinomiale è ottenuta mediante un'espansione sulle velocità troncata al secondo ordine:

$$F^{(eq)}(\rho, \mathbf{j}) = \frac{W_i}{\rho_0} \left\{ \rho + \frac{m}{k_b T} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{j} + \frac{m}{2\rho k_b T} \left[\frac{m}{k_b T} (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{j})^2 - \mathbf{j}^2 \right] \right\} \quad (3.60)$$

la quale può essere riscritta più comodamente come [Regulski e Szumbariski 2012]

$$F_i^{eq} = W_i \rho \left[1 + \frac{\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{\mathbf{u}^2}{2c^2} \right] \quad (3.61)$$

in cui \mathbf{u} coincide con il vettore risultante di velocità locale

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^8 \mathbf{c}_i \cdot f_i \quad \rho = \sum_i f_i \quad (3.62)$$

I momenti di tale distribuzione [Wolf-Gladrow 2005] risultano nulli se *dispari*

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} = 0 \quad (3.63)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} = 0 \quad (3.64)$$

mentre se *pari*:

$$\sum_i W_i = \int f^{(eq)} c d\mathbf{u} = \rho_0 \quad (3.65)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} = \int f^{(eq)} v_\alpha v_\beta d\mathbf{u} = \rho_0 \frac{2\rho k_b T}{m} \delta_{\alpha\beta} \quad (3.66)$$

$$\sum_i W_i c_{i\alpha} c_{i\beta} c_{i\gamma} c_{i\delta} = \int f^{(eq)} v_\alpha v_\beta v_\gamma v_\delta d\mathbf{u} = \rho_0 \left(\frac{2\rho k_b T}{m} \right)^2 (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) \quad (3.67)$$

In base al calcolo dei momenti delle funzioni di distribuzione di equilibrio si deducono i pesi $W_i(\rho, \mathbf{j})$ e la velocità del suono c per il modello Lattice Boltzmann D_2Q_9 :

$$W_0 = \frac{4}{9} \quad W_1 = \frac{1}{9} \quad W_2 = \frac{1}{36} \quad c = \sqrt{\frac{3k_b T}{m}}$$

3. Tali coefficienti, introdotti nell'espressione (3.60), forniscono le nove funzioni di equilibrio $F_i^{(eq)}$:

$$F_0^{(eq)} = \frac{4}{9}\rho \left[1 - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right] \quad (3.68)$$

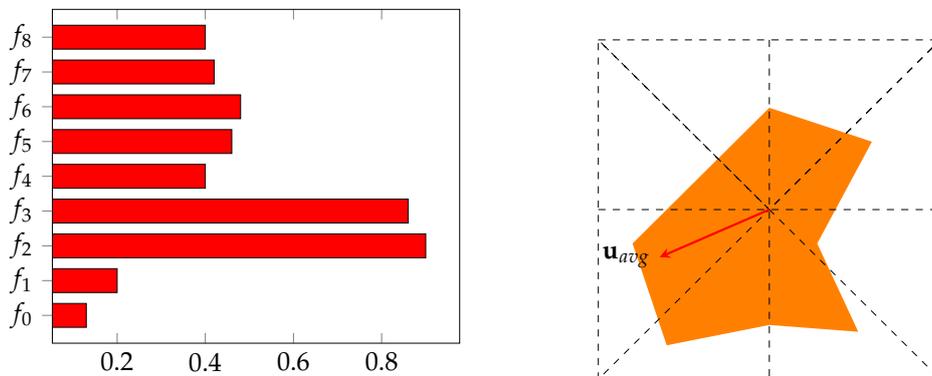
$$F_i^{(eq)} = \frac{1}{9}\rho \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right] \quad i = 1,2,3,4 \quad (3.69)$$

$$F_i^{(eq)} = \frac{1}{36}\rho \left[1 + \frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2} \right] \quad i = 5,6,7,8 \quad (3.70)$$

L'algoritmo di risoluzione del lattice dovrà procedere in tal senso:

1. Ricavati i valori iniziali di massa $\rho(\mathbf{r}, t)$ e quantità di moto $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, calcolare le distribuzioni di equilibrio $F_i^{(0)}(\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{j}(\mathbf{r}, t))$ ed imporre $F_i = F_i^{(0)}$.
2. Applicare l'equazione cinetica: sommare la funzione di distribuzione di non-equilibrio $F_i(\mathbf{r}, t)$ e di equilibrio $F_i^{(0)}(\mathbf{r}, t)$; ricordando di imporre il peso appropriato $(1 - \omega)$, propagare le velocità ai siti vicini.
3. Calcolare i nuovi valori di $\rho(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ definite dalla nuova condizione post propagazione.
4. Calcolare la nuova distribuzione di equilibrio.

Il grafico seguente evidenzia bene le funzioni di distribuzione ed il loro ruolo nella determinazione della velocità risultante \mathbf{u}_{avg} [Regulski e Szumbariski 2012]. Va ricordato che nei metodi



LB con approssimazione BGK, le collisioni non sono definite esplicitamente entrando in gioco solo nella fase di transizione dell'equilibrio locale e non in quello globale.

3.9 LBGK tridimensionale

L'estensione nello spazio in tre dimensioni passa attraverso la scelta di un lattice di natura 3D ed il calcolo delle appropriate distribuzioni di equilibrio. In particolare verranno calcolate le condizioni di equilibrio mediante la distribuzione di Koelman [Koelman 1991]. La limitazione dei precedenti modelli LGCA di non poter descrivere uno spazio tridimensionale viene superata da D'Humieres con l'introduzione di un lattice *Face Centred HyperCube* [FCHC] che rispettasse le condizioni di isotropia. Per la descrizione nello spazio tridimensionale si fa riferimento a tre modelli in particolare:

- D_3Q_{15}
- D_3Q_{19}
- D_3Q_{27}

Per la simulazione idrodinamica, D'Humieres et al. proposero il modello mostrato in Fig.3.4 che

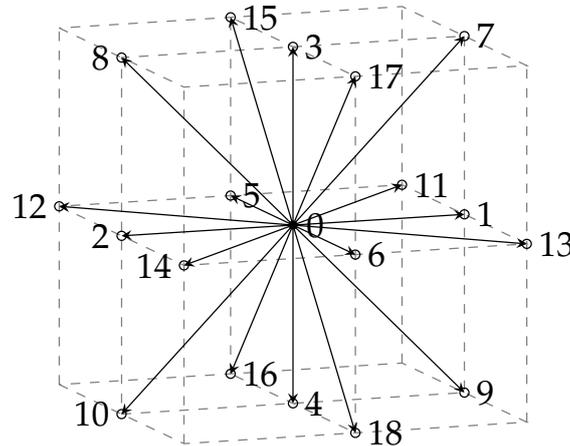


Figura 3.4: Modello D_3Q_{19}

simula un LGCA con 19 velocità su di un lattice cubico; tale modello è caratterizzato da un set di velocità così definito:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0 &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{c}_{1,2}; \mathbf{c}_{3,4}; \mathbf{c}_{5,6} &= (\pm 1, 0, 0); (0, \pm 1, 0); (0, 0, \pm 1) \\ \mathbf{c}_{7,\dots,10}; \mathbf{c}_{11,\dots,14}; \mathbf{c}_{15,\dots,18} &= (\pm 1, \pm 1, 0); (\pm 1, 0, \pm 1); (0, \pm 1, \pm 1) \end{aligned}$$

Il calcolo dei pesi W_i viene effettuato in analogia con il caso bidimensionale; al solito i momenti di ordine dispari risultano nulli, mentre i momenti della funzione di distribuzione di equilibrio

risultano uguali a :

$$\begin{aligned}\sum_i W_i &= W_0 + 6W_1 + 12W_2 = \rho_0 \\ \sum_i c_{ax}^2 W_i &= 2W_1 + 8W_2 = \rho_0 \frac{k_b T}{m} \\ \sum_i c_{ax}^4 W_i &= 2W_1 + 8W_2 = 3\rho_0 \left(\frac{k_b T}{m}\right)^2 \\ \sum_i c_{ax}^2 c_{ay}^2 W_i &= 4W_2 = 3\rho_0 \left(\frac{k_b T}{m}\right)^2\end{aligned}$$

Il sistema di equazioni sopra descritto risulta determinato, ed in particolare

$$W_0 = \frac{\rho_0}{3} \quad W_1 = \frac{\rho_0}{18} \quad W_2 = \frac{\rho_0}{36} \quad \frac{k_b T}{m} = \frac{1}{3}$$

Avendo a disposizione i coefficienti dell'equazione (3.17), è possibile ricavare le funzioni di equilibrio F_i per il modello D_3Q_{19}

$$\begin{aligned}F_0^{(eq)} &= \frac{1}{3}\rho \left[1 - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2}\right] \\ F_i^{(eq)} &= \frac{1}{18}\rho \left[1 - \frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2}\right] \quad i = 1, \dots, 6 \\ F_i^{(eq)} &= \frac{1}{36}\rho \left[1 - \frac{3\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \frac{9(\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \frac{3\mathbf{u}^2}{2c^2}\right] \quad i = 7, \dots, 18\end{aligned}$$

Con la stessa procedura, definendo le velocità per il modello di lattice specifico, è possibile ricavare le funzioni di distribuzione di equilibrio ricavando i coefficienti di peso e la velocità di propagazione del suono nell'unità lattice considerata:

Modello	Velocità lattice	Pesi W_i	c_{sound}^2
D_1Q_3	$0; \pm 1$	$2/3; 1/6$	$1/3$
D_1Q_5	$0; \pm 1; \pm 2$	$6/12; 2/12; 1/12$	1
D_2Q_7	$(0,0); (\pm 1/2, \pm \sqrt{3}/2)$	$1/2; 1/12$	$1/4$
D_2Q_9	$(0,0); (\pm 1, 0); (0, \pm 1); (\pm 1, \pm 1)$	$4/9; 1/9; 1/36$	$1/3$
D_3Q_{15}	$(0,0,0); (\pm 1, 0, 0); (0, \pm 1, 0); (0, 0, \pm 1); (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$	$2/9; 1/9; 1/72$	$1/3$
D_3Q_{19}	$(0,0,0); (\pm 1, 0, 0); (0, \pm 1, 0); (0, 0, \pm 1); (\pm 1, \pm 1, 0); (\pm 1, 0, \pm 1); (0, \pm 1, \pm 1)$	$1/3; 1/18; 1/36$	$1/3$

Tabella 3.1: Caratteristiche dei modelli Lattice Boltzmann [Z. Guo 2013]

3.10 Modelli Lattice Boltzmann MRT

I modelli Lattice Boltzmann descritti precedentemente hanno la caratteristica di avere tutti lo stesso parametro che definisce il tempo di rilassamento verso l'equilibrio $\tau = 1/\omega$. Se da un lato questa scelta semplifica molto la complessità dell'operatore di collisione, dall'altro il modello risulta poco flessibile specialmente per alti numeri di Reynolds. Per modelli che risultano essere più stabili, bisogna far riferimento ai modelli Lattice Boltzmann Multi Relaxation Time (MRT), introdotti da Higuera, Succi, Benzi. Più nel dettaglio il modello D_2Q_9 è stato trattato secondo lo schema MRT da Lallemand e Lou, mentre per il modello D_3Q_{19} si può far riferimento al modello di D'Humieres, Ginzburg, Krafczyk, Lallemand e Luo.

Ciò che distingue lo schema MRT dal STR analizzato precedentemente è la scelta delle variabili: mentre i modelli Lattice Boltzmann che seguono lo schema SRT agiscono sulle variabili f_i associate alle velocità discrete c_i , lo schema MRT considera variabili ottenute come combinazione lineare delle f_i , ossia i momenti delle distribuzioni f_i .

Questo cambiamento di prospettiva risulta efficace se si tiene in considerazione che i momenti delle funzioni di distribuzione hanno dei significati fisici e molti di questi processi sono regolati dall'interazione delle variabili macroscopiche da essi definite. Una rappresentazione basata su momenti delle funzioni di distribuzione permette un controllo ottimale circa il rilassamento separato di ognuno di essi, intervenendo in modo diretto ed efficace sulle proprietà fisiche simulate [Palpacelli 2005]. Il nuovo insieme di variabili è dato da :

$$\mathbf{R} = (\rho, e, \epsilon, j_x, q_x, j_y, q_y, p_{xx}, p_{xy})^T$$

definite come combinazione lineare delle funzioni f_i con:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\mathbf{F}$$

in cui \mathbf{M} è una matrice dei coefficienti $[m \times m]$ specifica per il modello considerato, ed \mathbf{F} è il vettore contenente le funzioni di distribuzione f_i .

Si definiscono successivamente le equazioni di rilassamento per i momenti e le funzioni di equilibrio, quest'ultime scelte in modo che sia rispettata la simmetria del sistema. Il passo successivo consiste nella definizione dello stato di post-collisione \mathbf{R}^* ed il conseguente calcolo delle variabili \mathbf{F}^* calcolato come:

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R}^*$$

in questo modo si ottengono i valori delle variabili f_i^* che saranno sottoposti a propagazione.

3.11 Condizioni al contorno

Le condizioni al contorno per i modelli Lattice Boltzmann rappresentano un argomento particolarmente delicato poiché influenzano la stabilità e i risultati del modello. Con la loro implementazione nel modello è possibile eliminare dei nodi di calcolo inattivi, riducendo note-

volmente il tempo impiegato per le simulazioni [M. C. Sukop 2005]. In generale esistono due categorie che comprendono lo spettro di condizioni al contorno possibili [Wolf-Gladrow 2005]:

- *CC Elementari*
- *CC Complesse*

I primi vengono ampiamente descritti da Skordos (1993), Inamuro et al. (1995); Noble et al. (1995) ed individuano un contorno fisico allineato con le coordinate del reticolo; i secondi trovano una trattazione bibliografica negli articoli di Cornubert et al. (1991), Ginzbourg and Adler (1994), Ladd (1994) e possono rappresentare contorni fisici complessi espressi da intersezioni con la griglia di calcolo. A queste due macrocategorie appartengono le sottoclassi di seguito descritte:

- *CC Periodiche*
- *CC No-Slip*
- *CC Free-Slip*
- *CC Open inlet/outlet*

Le *CC Periodiche* sono utilizzate per simulare un dominio fluido di lunghezza infinita che si ripete sempre uguale a se stesso, mentre le *CC Open inlet/outlet* simulano l'ingresso e l'uscita di un flusso dal dominio. Al contrario le *CC No-Slip* e *CC Free-Slip* traducono le informazioni macroscopiche relative all'influenza della scabrezza superficiale, modificando le funzioni di distribuzione delle particelle nel flusso in vicinanza con il contorno solido.

3.11.1 Condizioni periodiche

L'idea alla base che permette di simulare questa tipologia di contorno fisico collima con un'ipotesi di conservazione delle distribuzioni: tutto ciò che esce da un estremo deve rientrare nell'estremo opposto come se fossero connessi. Le grandezze macroscopiche variano all'interno del generico piano ortogonale al flusso. Per semplicità descrittiva si fa riferimento al modello D_2Q_9 considerando il dominio definito dalla Fig.3.5 La condizione di periodicità sul lato

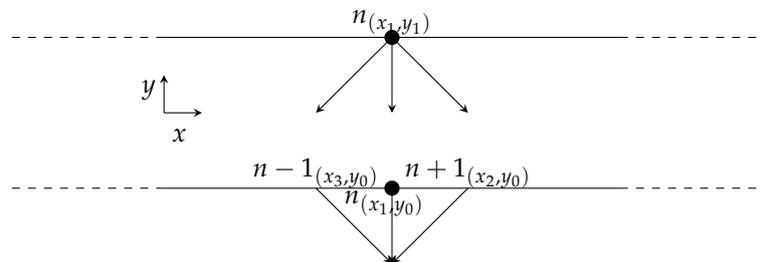


Figura 3.5: *Nodo solido appartenente al contorno.*

di lunghezza infinita D in corrispondenza di un generico nodo n_{x_1, y_0} è data dalle condizioni imposte nel nodo $n_{(x_1, y_1)}$ rispettando la conservazione della massa:

$$F_7(x_1, y_1) = F_7(x_2, y_0);$$

$$F_4(x_1, y_1) = F_4(x_1, y_0);$$

$$F_8(x_1, y_1) = F_8(x_3, y_0);$$

3.11.2 Condizioni No-Slip e Free-Slip

Entrambe le tipologie di condizioni al contorno simulano l'interazione del fluido in presenza di un bordo solido o di un ostacolo all'interno del flusso. Si risolve quindi uno schema *bounce back* determinando le funzioni di distribuzione incognite delle particelle che, in seguito al contatto con il contorno solido, vengono respinte verso il dominio fluido.

Esistono principalmente due varianti principali del metodo:

- Full-way bounce back → **No-Slip**.
- Half-way bounce back → **Free-Slip**.

La prima altera esclusivamente il modello di collisione mentre la seconda, riflettendo direttamente le particelle in ingresso, modifica la fase di propagazione. In letteratura esistono molteplici modelli bounce-back, i più rappresentativi per le tipologie enunciate verranno di seguito descritti.

Modello D_2Q_9 - Condizione sulla Velocità

Si prende in esame il modello D_2Q_9 esposto in Fig.3.7. Ad ogni iterazione, nella fase di collisione si raggiunge l'equilibrio locale nei nodi fluidi e le funzioni di distribuzione vengono riflesse verso le direzioni di partenza. La collisione nei nodi solidi viene modificata, mentre la fase di propagazione resta invariata secondo lo schema proposto in Fig.3.6.

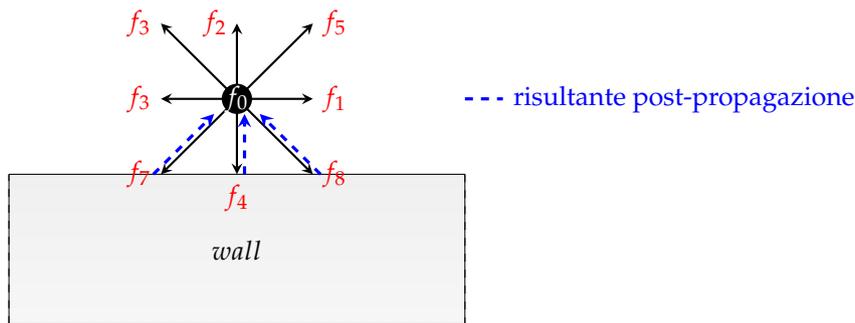


Figura 3.6: No-Slip: Risultante delle funzioni di distribuzione post-propagazione [M. C. Sukop 2005].

Si consideri un vettore velocità bidimensionale \mathbf{u}_0 tale che:

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

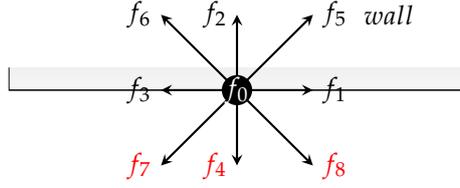


Figura 3.7: Nodo solido appartenente al contorno [Q. Zou 1997], le funzioni di distribuzione incognite sono evidenziate in rosso.

Supponendo una condizione al contorno del tipo $\mathbf{u}_0 = [0 \ v_0]$ ed imponendo la condizione di dominio solido tramite le funzioni di distribuzione f_i con $i = (0, 1, 2, 3, 5, 6)$, sarà necessario risolvere le incognite ρ e f_7, f_4, f_8 evidenziate in Fig.3.7. Il calcolo della densità macroscopica avviene secondo la

$$\rho = \sum_i f_i \quad (3.72)$$

Assumendo inoltre che le componenti (x, y) di velocità siano date dai singoli contributi delle funzioni di distribuzione lungo le 2 direzioni, si ha:

$$\begin{aligned} x \rightarrow \quad 0 &= f_1 - f_3 + f_5 - f_6 - f_7 + f_8 \\ y \rightarrow \quad \rho v_0 &= f_2 - f_4 + f_5 + f_6 - f_7 - f_8 \end{aligned} \quad (3.73)$$

Imponendo la condizione di *bounce-back* in direzione normale al contorno si può scrivere:

$$f_2 - f_2^{eq} = f_4 - f_4^{eq} \quad (3.74)$$

come proposto da [Q. Zou 1997]. Il sistema risultante è costituito da 4 equazioni in quattro incognite, per cui risulta risolvibile con le seguenti equazioni finali.:

$$f_4 = f_3 - f_2^{eq} + f_4^{eq} = f_2 - \frac{2}{3}\rho v_0 \quad (3.75)$$

in cui le funzioni di equilibrio sono definite secondo le (3.68), (3.69), (3.70) con i coefficienti definiti in Tab.3.1 appartenenti al modello D_2Q_9 . Dalle equazioni (3.73) si ricava l'incognita ρ :

$$\rho = f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_5 + f_6) \quad (3.76)$$

Si procede sostituendo l'equazione di equilibrio alla traslazione verticale (3.73) e la (3.75) nell'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale (3.73) ottenendo:

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho v_0 \quad (3.77)$$

ed allo stesso modo si calcola l'ultima incognita:

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho v_0 \quad (3.78)$$

Riassumendo la procedura, si impone una velocità iniziale del tipo (3.71) e si risolvono nelle funzioni di distribuzioni incognite definite in Fig.3.7.

Modello D_2Q_9 - Condizione sulla Pressione

In maniera del tutto analoga al caso precedente, si impone la condizione al contorno $\rho = \rho_0$ nota, procedendo con il calcolo delle funzioni di distribuzione incognite evidenziate nella Fig.3.7 e della velocità v , imponendo che la componente orizzontale della velocità u sia nulla. Ipotizzando inoltre la condizione di *bounce-back* nella sola direzione normale al contorno, le incognite f_4, f_7, f_8 e la componente tangenziale di velocità v derivano da un sistema di equazioni determinato simile al caso precedentemente descritto [M. C. Sukop 2005]. In definitiva si ha:

$$v = -1 + \frac{f_0 + f_1 + f_3 + 2(f_2 + f_5 + f_6)}{\rho_0} \quad (3.79)$$

$$f_4 = f_2 - \frac{2}{3}\rho_0 v \quad (3.80)$$

$$f_7 = f_5 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho_0 v \quad (3.81)$$

$$f_8 = f_6 + \frac{1}{2}(f_1 - f_3) - \frac{1}{6}\rho_0 v \quad (3.82)$$

Riassumendo quindi, le funzioni di distribuzione f_4, f_7, f_8 e la velocità tangenziale v risultano univocamente definite data la condizione iniziale $\rho = \rho_0$.

No-Slip – Modello D_3Q_{15}

Il metodo Inamuro et al. può essere esteso alla formulazione tridimensionale, seppur in maniera complessa, risolvendo ricorsivamente l'equazione implicita del modello. Più facile è l'estensione al caso 3D delle condizioni no-slip di Zou Q. et al. [Q. Zou 1997] per un modello D_3Q_{15} : la matrice R risulta determinata secondo la Tab.3.1, e le funzioni di distribuzione di equilibrio vengono determinate associando i pesi descritti nella Tab.3.1. Ne risulta che:

$$f_0 = \frac{1}{8}\rho - \frac{1}{3}\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad (3.83)$$

$$f_i = \frac{1}{8}\rho - \frac{1}{3}\rho \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2}\rho (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{6}\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad \text{per } i = 1, \dots, 6 \quad (3.84)$$

$$f_i = \frac{1}{64}\rho - \frac{1}{24}\rho \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{16}\rho (\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{1}{4}\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \quad \text{per } i = 7, \dots, 14 \quad (3.85)$$

Riferendoci alla figura Fig.3.8 le funzioni di distribuzione [$f_5, f_7, f_{10}, f_{11}, f_{14}$] evidenziate in rosso risultano essere le incognite.

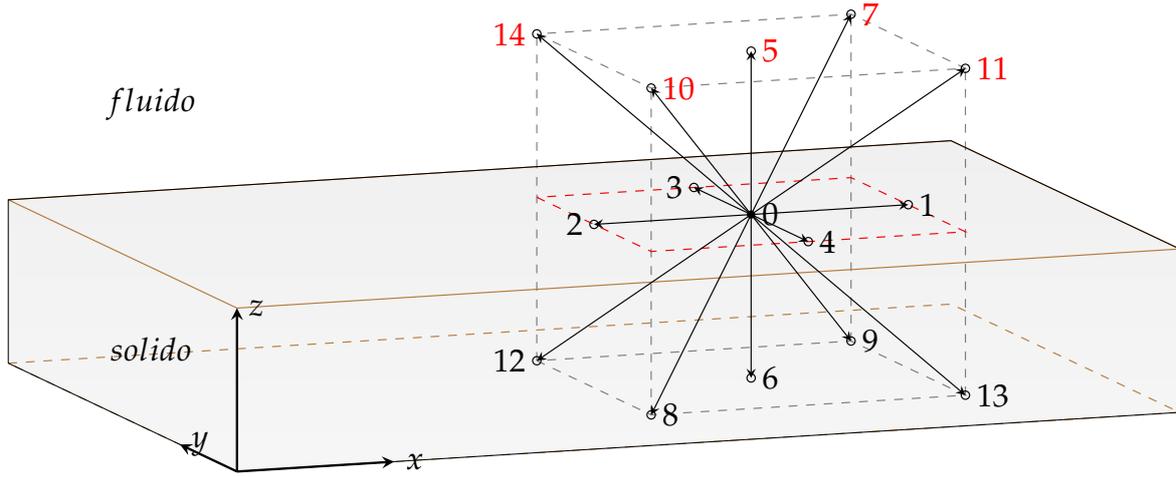


Figura 3.8: CC per modello D_3Q_{15} : viene considerato un nodo centrato in 0 appartenente al contorno solido. Le funzioni di distribuzione evidenziate in **nero** risultano note, mentre quelle in **rosso** sono incognite [Q. Zou 1997].

Utilizzando lo stesso procedimento del modello D_2Q_9 si procede all'individuazione delle incognita ρ

$$\rho = \frac{1}{1 - v_z} [f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + 2(f_6 + f_8 + f_9 + f_{12} + f_{13})] \quad (3.86)$$

ed utilizzando la conservazione della quantità di moto lungo z (3.87), con l'imposizione della condizione di *bounce-back*, si arriva alla definizione delle funzioni di distribuzione incognite:

$$\rho v_z = f_5 - f_6 + f_7 - f_8 - f_9 + f_{10} + f_{11} - f_{12} - f_{13} + f_{14} \quad (3.87)$$

$$f_i = f_{i+1} + f_i^{(eq)} - f_{i+1}^{(eq)} \quad \text{con } i = 5, 7, 11 \quad (3.88)$$

$$f_i = f_{i-1} + f_i^{(eq)} - f_{i-1}^{(eq)} \quad \text{con } i = 10, 14 \quad (3.89)$$

in cui le $f_i^{(eq)}$ sono definite secondo le (3.69), (3.70). Ciò finora esposto permette di avere delle indicazioni per l'imposizione di condizioni *No-Slip*, simulando l'eventuale presenza di attrito tra dominio solido e fluido prima nel caso 2D poi in 3D [Q. Zou 1997].

Free-Slip – Modello D_2Q_9

Condizioni del tipo *Free-Slip* vengono imposte per la modellazione di contorni solidi dotati di attrito trascurabile. Il flusso tangenziale delle particelle non risulta vincolato, di conseguenza lo scambio di quantità di moto risulta nullo. Ne deriva che l'imposizione di una condizione free-slip comporta la riflessione della sola componente normale come mostrato in Fig.3.9. Questo modello risulta di testata efficacia per la simulazione di pareti impermeabili [Palpacelli

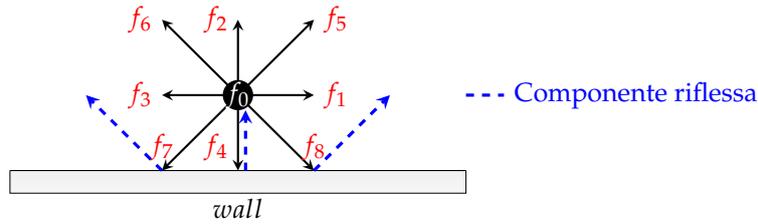


Figura 3.9: *Free-Slip: Riflessione su contorno solido in assenza di attrito.*

2005].

3.11.3 Condizioni Inlet-Outlet

In alcune applicazioni ingegneristiche risulta necessario imporre delle condizioni sul campo di velocità in corrispondenza dell'ingresso di una sezione di studio (inlet). Con lo scopo di esporre il procedimento per l'imposizione di tali condizioni a contorno, si procede valutando esclusivamente il caso 2D. Con riferimento alla figura Fig.3.10, le funzioni di distribuzione incognite sono f_1, f_5, f_8 . Supponendo noto il campo di velocità $\mathbf{u} = [u_x \ u_y]$ (condizione sulla velocità), procedendo secondo lo schema utilizzato per i precedenti modelli ed imponendo la condizione di *bounce back* per le distribuzioni normali alla sezione di inlet, si risolve il sistema determinato di equazioni ottenendo:

$$\rho = \frac{1}{1 - u_x} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_3 + f_6 + f_7)] \quad (3.90)$$

$$f_1 = f_3 + \frac{2}{3}\rho u_x \quad (3.91)$$

$$f_5 = f_7 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{2}\rho u_y + \frac{1}{6}\rho u_x \quad (3.92)$$

$$f_8 = f_6 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{2}\rho u_y + \frac{1}{6}\rho u_x \quad (3.93)$$

Con le stesse modalità si procede alla risoluzione delle funzioni di distribuzione di *outlet*:

$$\rho = \frac{1}{1 - u_x} [f_0 + f_2 + f_4 + 2(f_5 + f_1 + f_8)] \quad (3.94)$$

$$f_3 = f_1 + \frac{2}{3}\rho u_x \quad (3.95)$$

$$f_6 = f_8 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{2}\rho u_y + \frac{1}{6}\rho u_x \quad (3.96)$$

$$f_7 = f_5 - \frac{1}{2}(f_2 - f_4) + \frac{1}{2}\rho u_y + \frac{1}{6}\rho u_x \quad (3.97)$$

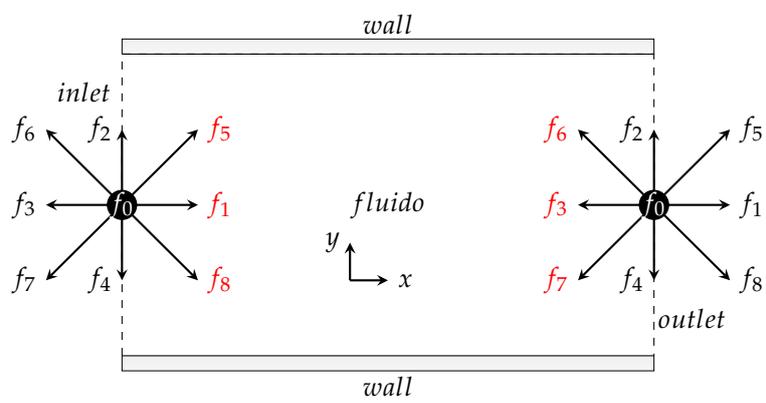


Figura 3.10: Condizione al contorno tipo inlet-outlet: in rosso sono evidenziate le incognite del problema

SFIORATORI DI SUPERFICIE A SALTO DI SCI

Il confinamento di cospicue quantità d'acqua a tergo di dighe genera un rischio di superamento incontrollato dello sbarramento con possibili conseguenze catastrofiche. La riduzione di questo rischio viene effettuata con la progettazione di sfioratori di superficie che rappresentano le *valvole di sicurezza* del sistema diga [Khatsuria 2005]. Se uno sbarramento, intrinsecamente, possiede la capacità necessaria (*Fully Supply Level*) per contenere l'intero volume del fluido in ingresso, la necessità di queste opere viene a mancare. Nel seguente capitolo verranno introdotti, senza pretesa di completezza, le opere idrauliche accessorie che vanno sotto il nome di sfioratori di superficie, particolareggiando l'analisi della tipologia a salto di sci (*Ski Jump Spillway*) e definendone le caratteristiche del getto sulla base di formule presenti in letteratura. Di qui si procederà alla descrizione della relazione che lega le caratteristiche del getto in ingresso con la probabile evoluzione del fondo della vasca di dissipazione a servizio dello sfioratore.

4.1 Tipologie e funzioni di uno sfioratore di superficie

Gli scarichi di superficie adempiono alla funzione di bypass del volume d'acqua in eccesso dall'invaso di ritenuta a tergo della diga verso il corpo idrico a valle. Precisamente ad essi vengono assegnate sei distinte funzioni:

- Mantenimento delle normali condizioni idrauliche di un fiume
- Scarico dell'invaso per l'utilizzo della risorsa idrica
- Mantenimento del livello iniziale dell'acqua durante le operazioni di controllo.
- Controllo dei flussi idrici ordinari e straordinari
- Rilascio di acqua in eccesso per mantenere livelli di sicurezza
- Scarico dell'invaso in condizioni di emergenza

Nella *Fig.4.1* ne vengono mostrate le varie tipologie in funzione della velocità del flusso e della tipologia di opere cui sono a servizio.

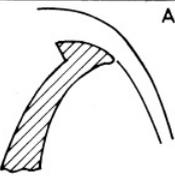
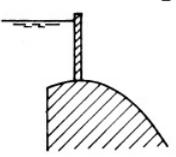
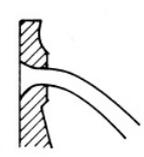
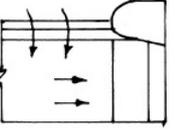
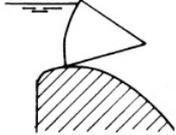
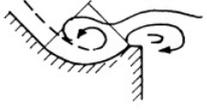
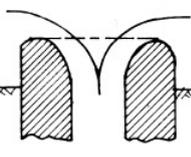
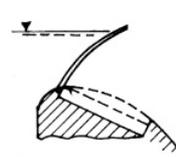
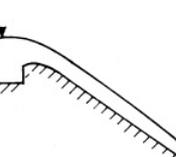
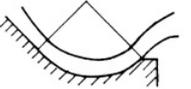
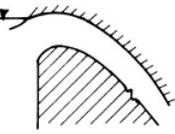
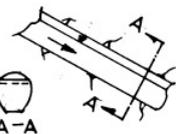
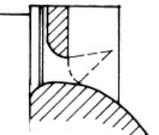
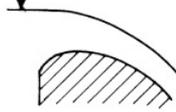
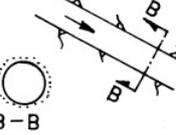
A	B	C	D
INLET	REGULATION	CHANNEL	OUTLET
 <p>A-1 OVERFLOW</p>	 <p>B-1 SLUICE GATE</p>	 <p>C-1 FREE FALL</p>	 <p>D-1 STILLING BASIN</p>
 <p>A-2 COLLECTING CHANNEL</p>	 <p>B-2 RADIAL GATE</p>	 <p>C-2 CASCADE</p>	 <p>D-2 ROLLER BUCKET</p>
 <p>A-3 SHAFT SPILLWAY</p>	 <p>B-3 FLAP GATE</p>	 <p>C-3 SPILLWAY CHUTE</p>	 <p>D-3 SKY JUMP</p>
 <p>A-4 SIPHON</p>	 <p>B-4 FUSE PLUG</p>	 <p>C-4 FREE FLOW TUNNEL</p>	 <p>D-4 PLUNGE POOL</p>
 <p>A-5 ORIFICE</p>	 <p>B-5 UN REGULATED</p>	 <p>C-5 PRESSURE TUNNEL</p>	

Figura 4.1: Tipologie di scarichi di superficie [Khatsuria 2005]: [A,B,C,D] = Tipologia di opere; [1=low ... 5 = high] = Condizioni del tirante a monte dell'opera .

4.2 Dissipatore a salto di sci

Gli sfioratori di superficie, dovendo smaltire cospicue portate, sono corredate da opere di dissipazione. Tali dispositivi idraulici hanno lo scopo di evitare l'erosione che si realizzerebbe a valle delle opere idrauliche e civili, in virtù delle velocità elevate che si stabiliscono all'uscita di esse. Lo scopo di questi manufatti è facilitare la formazione di correnti lente a valle, localizzando a distanze definite il tratto soggetto ad erosione. Di contro, si ha lo sviluppo di fenomeni erosivi molto intensi, le cui caratteristiche sono funzione della tipologia di opera idraulica. Le

opere idrauliche accessorie che vengono utilizzate per tali scopi sono classificabili in funzione di vari criteri:

- Funzionamento idraulico: turbolenza e attrito interno o a impatto
- Modalità di dissipazione: orizzontale, verticale oppure obliqua
- Geometria o forma del flusso principale
- Geometria o forma della struttura

Per le opere idrauliche di grandi dimensioni, spesso la scelta converge su tre varianti di opere di dissipazione:

1. **Dissipatori a risalto idraulico** → generando un violento mescolamento delle masse d'acqua, inducono una forte dissipazione come mostrato in Fig.4.2.

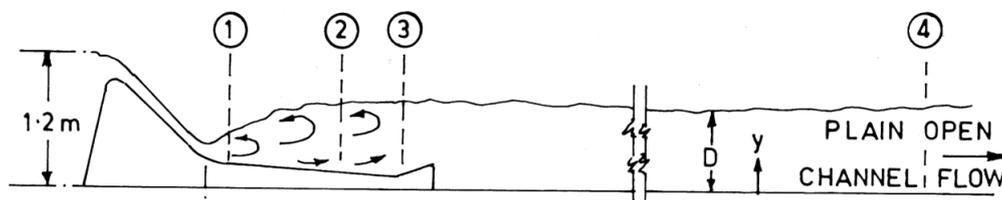


Figura 4.2: Opera idraulica di dissipazione mediante rialto idraulico a valle dello sfioratore di superficie [Khatsuria 2005].

2. **Dissipatori a Salto di Sci** → Fig.4.7 caratterizzati da un mescolamento delle masse d'acqua con l'aria circostante quando la corrente viene restituita in un alveo naturale mediante un ampio getto indirizzato verso l'alto.
3. **Dissipazione continua** → attraverso macroscabrezze che determinano perdite continue Fig.4.3.

Spostando l'attenzione sulla seconda tipologia, da ricerche bibliografiche, essi vengono chiamati con nomi differenti: ski jump bucket, flip bucket, trajectory bucket, free jet spillways e free over-falls. La caratteristica comune è quella di descrivere delle strutture impiegate per la dissipazione energetica grazie alla traiettoria del getto generato dall'azione della corrente e dalle caratteristiche idrauliche del canale che lo veicola. Tali organi dissipativi si differenziano in funzione delle differenti tipologie progettuali di:

- Forma dello scivolo → sezione costante e/o variabile, scabrezza, pendenza.
- Inversione del getto → metri di risalita della colonna d'acqua dovuti alla concavità dello scivolo verso l'alto.
- Raggio di curvatura → a seconda del caso possono essere presenti più raggi di curvatura nella concavità.

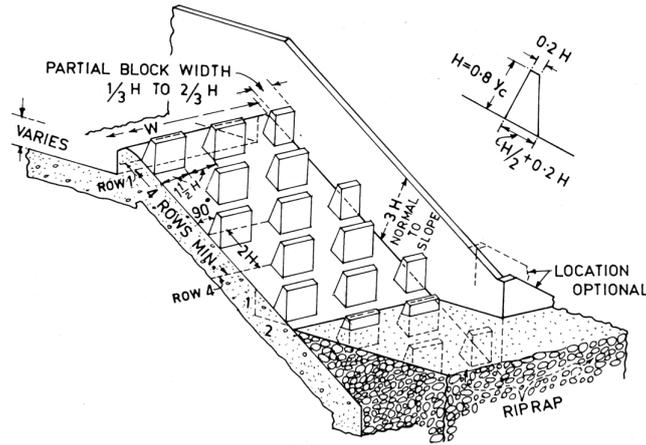


Figura 4.3: Dissipatore a "filtro" costituito da macrocabrezze poste lungo la sezione longitudinale [Khatsuria 2005].

- Angolo di deviazione finale → angolo di uscita della vena fluida.

Cambiando i parametri sopra descritti la traiettoria del getto varierà di conseguenza, influenzando quelle che sono le caratteristiche idrauliche di interesse quali: *pressione sullo scivolo, traiettoria del getto libero ed erosione nel punto di ingresso.*

4.3 Caratterizzazione del getto da letteratura

Partendo da una geometria di studio descritta in Fig.4.4 e Fig.4.5 viene effettuata una valutazione dell'ampiezza del getto e della gittata a partire dall'equazione balistica definita in letteratura. Al fine di individuare le condizioni idrodinamiche in ingresso, si è proceduto quindi con la

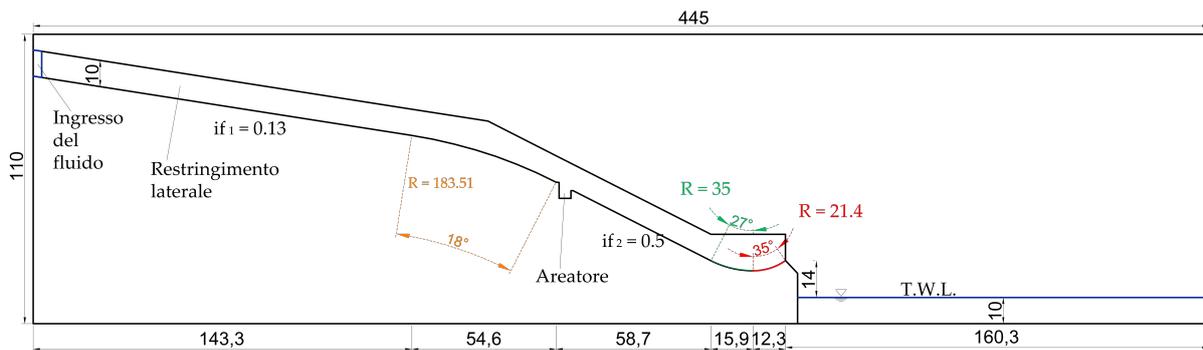


Figura 4.4: Sezione longitudinale dello sfioratore di superficie a salto di sci.

ricostruzione del profilo di corrente con il *metodo predictor-corrector*, utilizzato per la risoluzione dell'equazione dei profili di corrente in moto permanente gradualmente variato:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -j \tag{4.1}$$

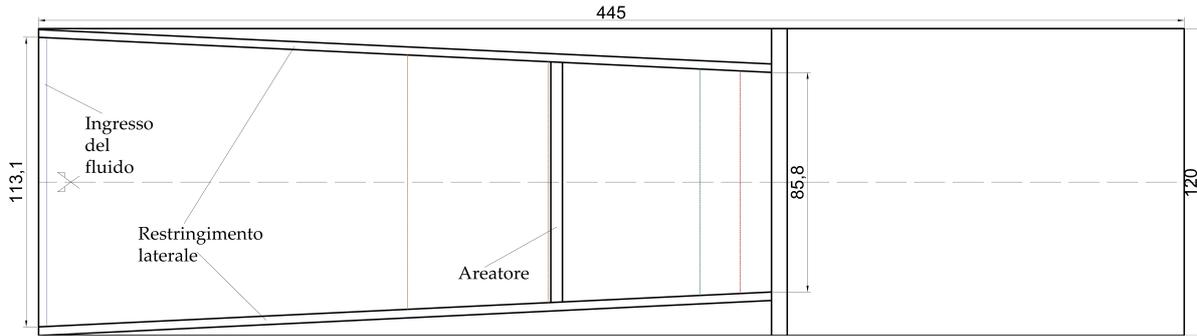


Figura 4.5: Sezione lungo il piano [X Y] dello sfioratore di superficie a salto di sci.

in cui H è il carico totale, s l'ascissa e j la pendenza della linea sul carico totale [DiRisio 2014]. Si è supposto un canale di lunghezza totale L , caratterizzato da 2 tratti a diversa pendenza if_1 e if_2 lunghi rispettivamente L_1 ed L_2 e di larghezza variabile linearmente da $B0_1$ a $B0_2$; definiti dimensionalmente in Tab.4.1. Poiché il profilo della traiettoria uscente da un salto di

L [m]	L_1 [m]	L_2 [m]	if_1	if_2	$B0_1$ [m]	$B0_2$ [m]
256	172	84	0.13	0.5	113.1	85.8

Tabella 4.1: Valori del dominio allo studio

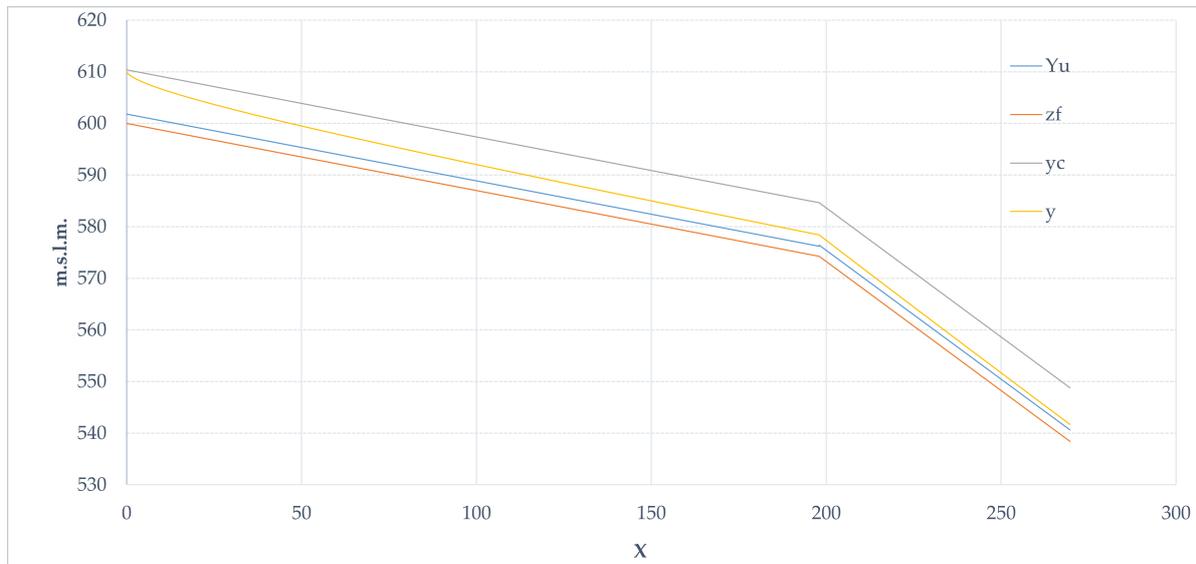


Figura 4.6: Risoluzione mediante metodo standard del profilo di rigurgito a valle dello sfioratore utilizzando i dati di Tab.4.1.

sci dipende dalla velocità in prossimità del salto e dall'angolo di deviazione, viene utilizzata l'equazione Balistica come proposto da Khatsuria [Khatsuria 2005].

$$\frac{X}{h_v} = \sin 2\theta + 2 \cos \theta \sqrt{\sin^2 \theta + \frac{y}{h_v}} \quad (4.2)$$

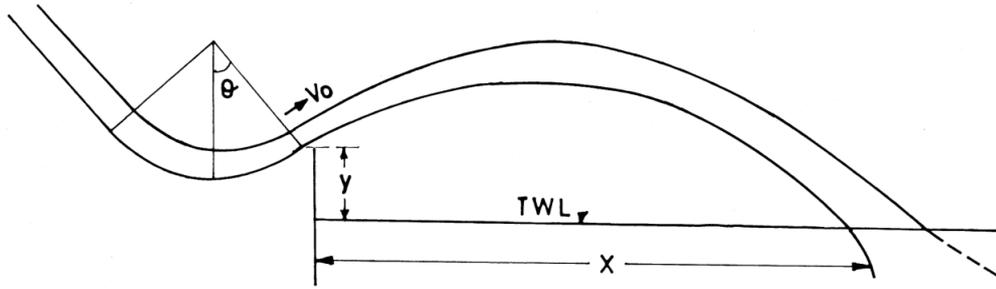


Figura 4.7: Gittata provocata dal salto di sci [Khatsuria 2005].

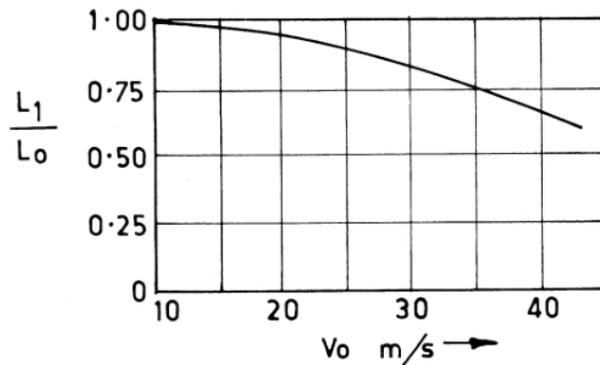


Figura 4.8: Relazione empirica che simula l'azione resistente dell'aria [Kawakami 1971].

in cui X coincide con la distanza longitudinale tra la bocca del salto di sci ed il punto d'impatto, y esprime la distanza verticale tra la bocca del salto di sci e la superficie libera (TWL), $h_v = V_0^2/2g$ indica il carico di velocità del getto e θ l'angolo di deviazione. È stato dimostrato [Kawakami 1971] che la resistenza dell'aria, in particolare per velocità superiori a 20 m/s, incide sulla traiettoria del getto Fig.4.8. La sua valutazione passa attraverso le seguenti formulazioni correttive.

$$y = \frac{1}{gk^2} \ln(\cos v + \tan \alpha \sin v) \quad (4.3)$$

$$L_1 = \frac{1}{gk^2} \ln(1 + 2k\alpha V_0 \cos \theta) \quad (4.4)$$

in cui

$$\alpha = \tan^{-1}(kV_0 \sin \theta) \quad (4.5)$$

$$v = V_0 \cos \theta \frac{e^{(gk^2x)} - 1}{k} \quad (4.6)$$

dove x, y sono le coordinate cartesiane, V_0 la velocità in prossimità del salto di sci, θ l'angolo di curvatura della parte terminale del salto, L_1 la gittata in presenza di resistenza dell'aria e k una costante che tiene conto della resistenza dell'aria. Le grandezze descritte sono visibili in Fig.4.7, mentre il grafico in Fig.4.8 descrive la relazione empirica presente in letteratura.

Risolvendo l'equazione (4.1) con l'imposizione dei parametri descritti in *Tab.4.1*, si ottengono vari tiranti Y_f al variare della portata defluente Q . I risultati ottenuti da questo studio sono riassunti in *Tab.4.3*. Utilizzando le relazioni (4.3) ... (4.6), imponendo le condizioni al contorno

$Q[m^3/s]$	$Y_f[m]$	$V_{avg}[m/s]$
11000	3.6	35.5
13200	4.2	36.1

Tabella 4.2: Valori derivanti dalla risoluzione della (4.1) mediante "metodo predictor-corrector" [DiRisio 2014] al variare delle portata in ingresso.

ricavate nella *Tab.4.3* con una distanza $Y_b = 14m$ alla base del salto e con $Y_t = Y_b + Y_l$ funzione del tirante di superficie libera Y_l , attraverso l'utilizzo delle relazioni empiriche in *Fig.4.8*, si è giunti ai seguenti risultati:

$Q[m^3/s]$	$X_b[m]$	$X_t[m]$	$X_{br}[m]$	$X_{tr}[m]$
11000	132	135.9	99	101.91
13200	146.5	151	109.8	113.3

Tabella 4.3: X_i con $i = [bottom, top]$ = gittata al variare del tirante e X_{ir} la gittata risultante considerando l'interazione con l'aria.

Tali caratteristiche non sono sufficienti per dimensionare l'opera idraulica in esame; si pensi ad esempio alla progettazione delle vasche di dissipazione. In letteratura si trovano studi sperimentali [S. Pagliara 2010] che tentano di correlare l'erosione nelle opere idrauliche suddette con l'angolo d'ingresso del getto (α_{to}, α_i), la velocità d'ingresso \mathbf{v}_i , l'impronta d'impatto A_i , velocità e pressioni ($\mathbf{v}_b, \mathbf{p}_b$) che si instaurano sul fondo costituendo le principali grandezze fisiche responsabili dell'erosione a valle dell'opera idraulica.

4.4 Studio morfodinamico semplificato

La stima dell'impronta generata dall'interazione tra il getto entrante nella vasca di dissipazione ed il fondo erodibile, è stata valutata utilizzando la relazione definita da Exner [C. Paola 2005]:

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = -A \frac{\partial Q_s}{\partial x} \quad (4.7)$$

dove z_b è la quota definita da un datum di riferimento, t il tempo, A un coefficiente casospecifico opportuno che tiene conto della porosità del materiale, e Q_s la portata solida media del flusso. La (4.7) esprime un bilancio di materia in relazione alla variazione della massa presente sul fondo con la variazione della portata di fluido sovrastante. Ai fini della valutazione dell'impronta di scavo generata dal getto in esame, si è pensato di correlare le caratteristiche idrodinamiche dell'efflusso con l'equazione di Exner basandosi sulla relazione:

$$Q_s \propto \mathbf{v}_b \quad (4.8)$$

in cui \mathbf{v}_b è la velocità che si instaura sul fondo della vasca di dissipazione. Da quest'ultima la (4.7) diventa

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} \propto -\beta \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial \mathbf{r}} \quad (4.9)$$

L'equazione (4.9) può essere utilizzata per avere una stima della variazione temporale dalla quota iniziale z_0 dovuta alla variazione di velocità di un fluido al disopra di un alveo erodibile. È inoltre possibile correlare le dimensioni spaziali delle zone di scavo/accumulo attraverso lo studio analitico della (4.9):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial \mathbf{r}} > 0 \rightarrow \text{Incipiente Scavo} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial \mathbf{r}} = 0 \rightarrow \text{Equilibrio dinamico tra accumulo ed escavazione} \\ \frac{\partial \mathbf{v}_b}{\partial \mathbf{r}} < 0 \rightarrow \text{Incipiente Accumulo} \end{cases}$$

Confrontando i risultati ottenuti da un'analisi delle caratteristiche idrodinamiche del getto in esame, tramite l'equazione di bilancio di Exner, è possibile ricavare l'impronta lasciata in termini di zone di scavo e zone di accumulo del materiale inizialmente presente sul fondo. Inoltre, l'analisi delle derivate delle componenti di velocità lungo i relativi assi di azione, ne definiscono l'intensità di scavo.

MODELLO LATTICE-BOLTZMANN APPLICATO A SFIORATORI DI SUPERFICIE A SALTO DI SCI

Lo studio effettuato nel lavoro di tesi ha permesso di analizzare l'insieme delle grandezze fisiche associate al getto generato da uno sfioratore di superficie a servizio di dighe, avente un profilo longitudinale a salto di sci caratterizzato da un restringimento laterale. Il modello di calcolo utilizzato è basato sulla teoria Lattice-Boltzmann e l'intero spettro delle simulazioni è volto alla definizione delle grandezze caratterizzanti l'ingresso in una vasca di dissipazione a servizio di scarichi di questa tipologia. Attraverso l'analisi temporale delle grandezze α_i , \mathbf{v}_i , A_i , L_i , \mathbf{v}_b , \mathbf{p}_b , è stato possibile addivenire ai parametri utili ai fini della stima delle dimensioni dello scavo provocato dell'ingresso della vena fluida.

5.1 Problema ingegneristico

Le dighe rappresentano una tipologia di opere idrauliche finalizzate alla creazione di un invaso artificiale, volto a soddisfare richieste civili ed economiche dell'area geografica in cui vengono realizzate. La difficoltà nella progettazione di tali opere, anche dal punto di vista della sicurezza, varia a seconda delle dimensioni. Ne deriva che il dimensionamento delle opere accessorie comporta una complessità paragonabile all'opera idraulica principale. Supponendo di avere a che fare con portate di $12000 \text{ m}^3/\text{s}$, la necessità di smaltirle a velocità dell'ordine dei 35 m/s è soddisfatta da sfioratori di superficie a salto di sci. La funzione di queste opere idrauliche coincide con la possibilità di confinare il risalto a valle dell'opera principale a discapito di un elevato fenomeno erosivo. Le grandezze fisiche caratterizzanti il getto non risultano di facile definizione, pertanto il modello matematico utilizzato rappresenta uno strumento attraverso il quale poter ricavare delle informazioni preliminari a supporto della necessaria valutazione sperimentale.

5.2 Riduzione del dominio di calcolo

Il dominio iniziale di studio risulta di $445 \times 120 \times 110 \text{ [m]}$ come mostrato in *Fig.4.4*, *Fig.4.5*. Con la mera finalità di diminuire il numero di nodi di calcolo, ne è stata effettuata una riduzione supportata da informazioni idrodinamiche utili allo studio delle caratteristiche della corrente in forma separata a valle dello sfioratore.

Per la geometria del modello è stato preso spunto dall'opera idraulica soggetta a modellazione fisica presente nel LIAM dell'Università degli Studi dell'Aquila. Il dominio computazionale finale (Fig.5.1) è stato studiato in modo da ottimizzare l'analisi delle grandezze oggetto di studio, inibendo la nascita di eventuali perturbazioni della corrente generate dalle condizioni al contorno di ingresso del fluido.

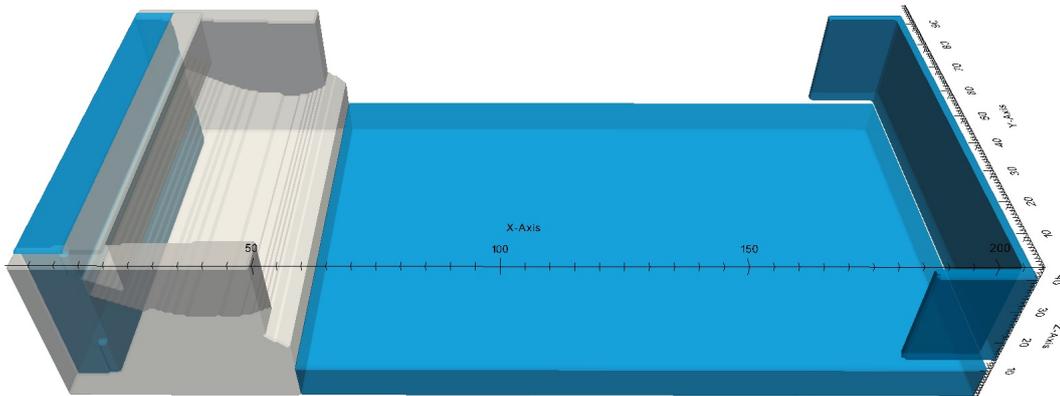


Figura 5.1: Geometria 3D del dominio di calcolo finale

5.3 Implementazione del codice di calcolo Palabos

La necessaria legittimazione fisico-matematica del modello utilizzato è garantita dalla corretta impostazione del problema matematico e dal rispetto dei principi della meccanica newtoniana. È noto che la modellazione matematica di un fenomeno fisico deve essere asseverata anche da riscontri sperimentali, per cui i risultati ottenuti potranno essere utilizzati per avere una stima delle grandezze osservabili sperimentalmente. La totalità delle simulazioni idrodinamiche effettuate è stata sviluppata mediante il codice di calcolo *Palabos*, libreria open-source prodotta da *FlowKit Ltd* nell'ambito della CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Scritta in linguaggio C++ è stata concepita per l'implementazione del modello Lattice-Boltzmann.

I modelli implementati nelle librerie del codice di calcolo hanno l'obiettivo di risolvere problemi legati alla fluidodinamica descrivendo

- *Modelli Multi-Fase* nei quali viene simulata l'interazione tra due o più fluidi immiscibili, con differenti proprietà fisiche come densità e viscosità.
- *Modelli a Superficie Libera* in cui la viscosità di una delle due fasi è virtualmente infinita e tale da rendere trascurabile la presenza della fase stessa.

I secondi sono stati usati del lavoro di tesi per la simulazione delle grandezze idrodinamiche associate al getto dello sfioratore di superficie a salto di sci.

5.3.1 Parametri caratteristici del modello

L'implementazione del modello di studio passa attraverso la definizione di parametri che consentano di riprodurre matematicamente ciò che fisicamente accade. Di seguito verranno definiti i parametri necessari alla simulazione delle grandezze fisiche di interesse. La discretizzazione dello spazio δ_x viene intesa come rapporto tra la lunghezza di riferimento ed il numero di celle N utilizzate nell'ambito della discretizzazione. Analogamente l'intervallo temporale δ_t è definito come rapporto tra il tempo di simulazione ed il numero di iterazioni N_{iter} adottate per cui:

$$\delta_x = \frac{1}{N} \quad \delta_t = \frac{1}{N_{iter}} \quad (5.1)$$

Attraverso un'analisi adimensionale è possibile trasformare qualsiasi variabile in modo che sia compatibile con il sistema discreto del modello Lattice-Boltzmann mediante:

$$u_{ad} = \frac{\delta_x}{\delta_t} u_{LB} \quad (5.2)$$

$$v_{ad} = 1/Re = \frac{\delta_x^2}{\delta_t} v_{LB} \quad (5.3)$$

quindi

$$u_{LB} = \frac{\delta_t}{\delta_x} u_{ad} \quad (5.4)$$

$$v_{LB} = \frac{\delta_t}{\delta_x Re} \quad (5.5)$$

La stabilità del modello di calcolo passa attraverso la scelta del δ_t , connessa alla definizione di δ_x come proposto nella (5.1). Il modello matematico Lattice-Boltzmann, per la risoluzione delle equazioni idrodinamiche, entra in un regime leggermente comprimibile. Gli effetti legati alla comprimibilità del fluido sono trascurabili per bassi valori del quadrato del numero di Mach [$Ma = v_{0_{LB}}/c_s$]. La riduzione dell'errore connesso alla comprimibilità, dell'ordine di δ_t^2/δ_x^2 , può avvenire attraverso un aumento della risoluzione della griglia di calcolo. In questi termini l'errore connesso al calcolo è dell'ordine di δ_x^2 . Parte essenziale per una simulazione più possibile realistica è la definizione dei parametri di seguito elencati:

- Viscosità cinematica $\nu = \mu/\rho [m^2/s]$
- Numero di Bond $Bo = \frac{\delta_\rho g \delta_x^2}{\gamma} \rightarrow$ Parametro descrivente l'interazione tra i fluidi considerati.
- Angolo di contatto $\theta \rightarrow$ Bagnabilità del fluido.
- Costante di Smagorinsky $Cs = 0.14 \rightarrow$ Parametro che tiene conto della turbolenza del fluido.

5.4 Schema di analisi

La scelta delle condizioni al contorno ha interessato gran parte della fase iniziale di tesi. L'obiettivo è stato quello di minimizzare il dominio per ridurre i tempi di calcolo ma al contempo di infittire il passo di integrazione. L'approccio di analisi si è articolato come segue:

- Determinare una condizione al contorno implementata nel modello che permetta una riduzione del dominio, limitando le perturbazioni dovute alla sua presenza.
- Effettuare una simulazione con un δx grande al fine di stimare le grandezze oggetto di analisi.
- Valutare i risultati derivati da una simulazione con dominio dimezzato rispetto al precedente.
- Confrontare le due simulazioni per validare l'ipotesi di simmetria.
- Simulare le caratteristiche del getto derivanti da un dominio dimezzato ma con un δx più fitto.
- Stimare, sulla base dei risultati ottenuti, le dimensioni dello scavo sul fondo della vasca di dissipazione posta a servizio dello sfioratore a salto di sci.

Le simulazioni di seguito descritte sono risultate utili alla definizione dei punti esposti precedentemente:

	Simulazione 1	Simulazione 2	Simulazione Finale
Portata [m^3/s]	13200	13200	13200 / 11000
δ_x [m]	0.67	0.67	0.5
Dominio [m]	210 x 100 x 45	210 x 50 x 45	210 x 50 x 45
N_{nodi}	$3.2 \cdot 10^6$	$1.4 \cdot 10^6$	$3.7 \cdot 10^6$
$t_{simulazione}$ [s]	14	14	14
Durata simulazione [h]	18	10	22

Tabella 5.1: *Descrizione simulazioni effettuate*

5.5 Simulazione 1

5.5.1 Geometria del modello

Il dominio in esame è di dimensioni 210 x 100 x 45 [m], analizzato con un passo di discretizzazione δ_x di 0.67 m. Nella parte sinistra sono state implementate 2 pareti di differente dimensione e poste alla stessa distanza [X] dall'origine [Fig.5.2]. Le dimensioni delle pareti sono pari a 10 x 88 [m] e 6 x 88 [m]. La velocità di ingresso del fluido è pari a 9.37 m/s, corrispondente d una portata di 13200 m^3/s . La posizione lungo l'asse [Z] delle pareti d'ingresso

del fluido sono state studiate in modo da minimizzare le turbolenze dovute alla discontinuità sull'incile. È stato inoltre riempito il box di alimentazione per ridurre i tempi di simulazione. Il tirante iniziale risultante dall'analisi descritta in Fig.4.7 è di $h_0 = 4.5$ m. La condizione iniziale di altezza del tirante è stata simulata da una parete al disopra dello scivolo che manda in pressione il fluido in ingresso evidenziata in Fig.5.2, caratterizzata da una superficie inferiore parallela al canale con pendenza $i_f = 0.5$. La parte finale dello sfioratore di superficie a salto di



Figura 5.2: Geometria della simulazione 1 → Sezione piano [X Z].

sci è composta da un canale con pendenza $i_f = 0.5$ e restringimento laterale [Fig.5.3]. La parte terminale concava dello scivolo è caratterizzata da un primo tratto con raggio di curvatura R_1 di 35 m ed un'estensione di 27° ed un secondo con raggio di curvatura R_2 di 21.4 m di 35° di estensione. L'altezza di inversione dello scivolo si attesta a 3.87 m.

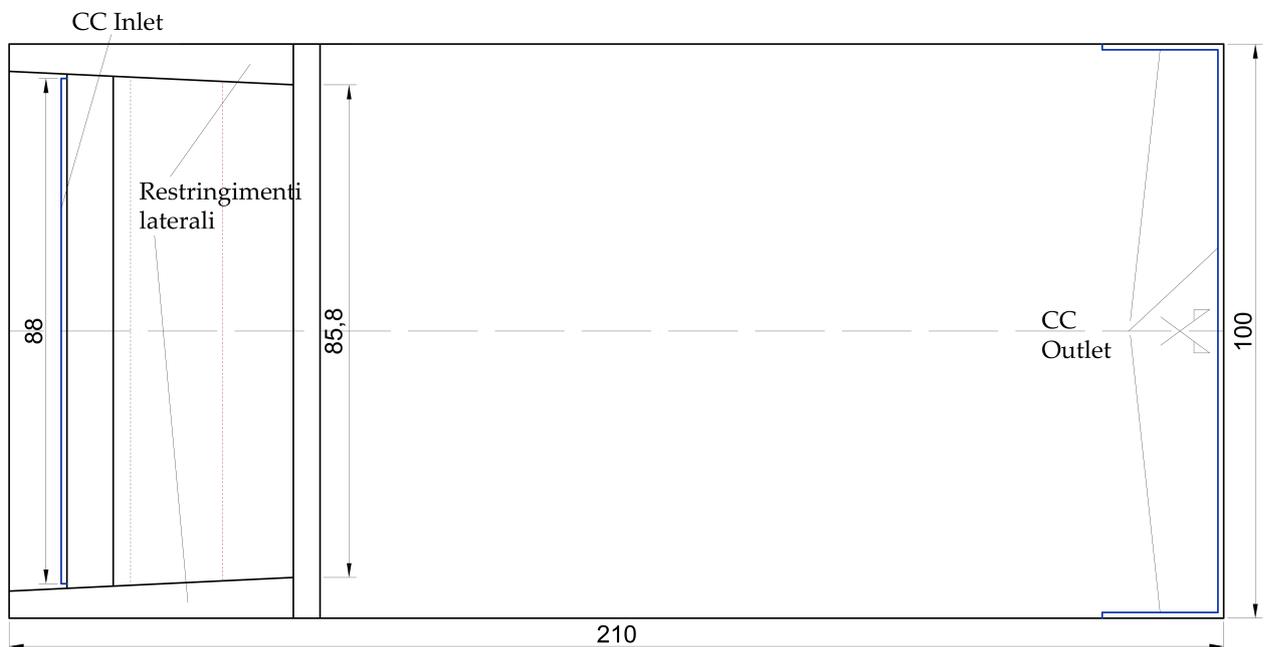


Figura 5.3: Geometria della simulazione 1 → Sezione piano [X Y].

A valle del dominio è stato simulato uno sfioro su 3 lati posti ad un'altezza di 2.5 m dalla superficie libera della vasca di dissipazione e composta da tre pareti di dimensioni 20×100

[m] e 20×20 [m] con una capacità di sfioro massima complessiva di $36000 \text{ m}^3/\text{s}$.

L'imposizione dei seguenti parametri è risultata funzionale alla definizione delle caratteristiche idrodinamiche:

δ_x [m]	ν [m^2/s]	θ [$^\circ$]	Bo []	C_{smago}	δ_t [s]	Δt [s]
0.6667	10^{-6}	100	59637	0.14	10^{-3}	14

Tabella 5.2: Parametri della Simulazione 1

5.5.2 Superficie libera

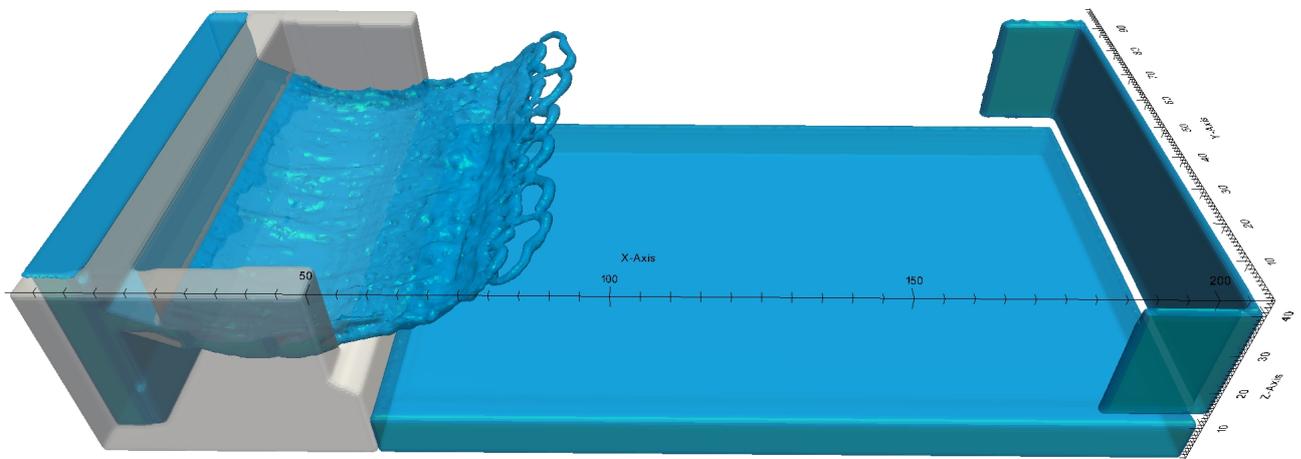


Figura 5.4: Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

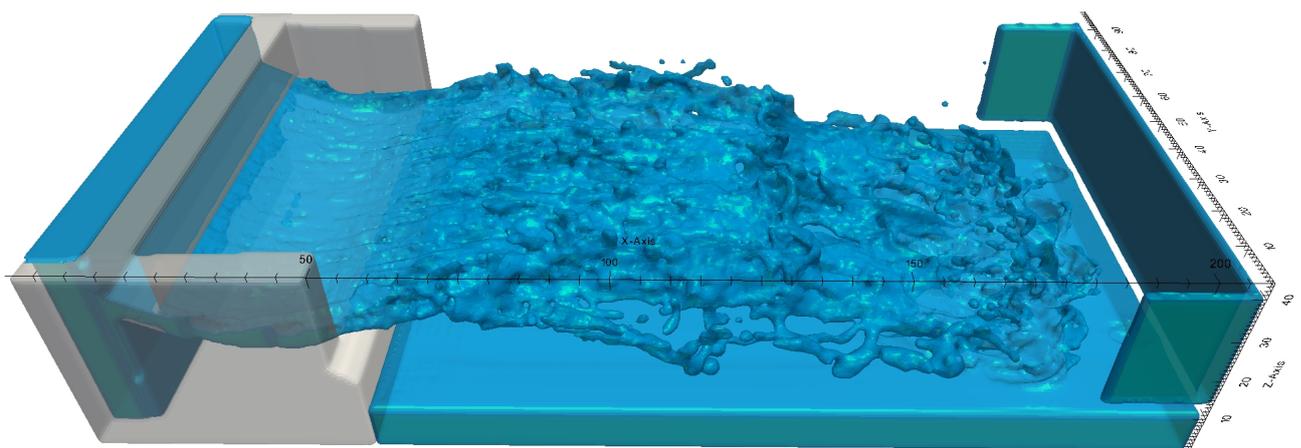


Figura 5.5: Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

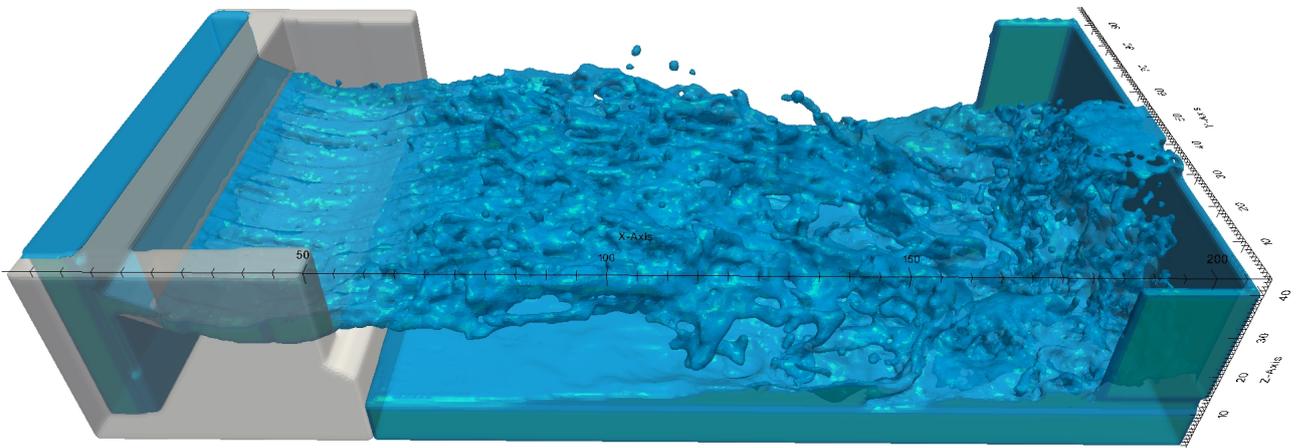


Figura 5.6: *Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi*

5.5.3 Andamento delle velocità

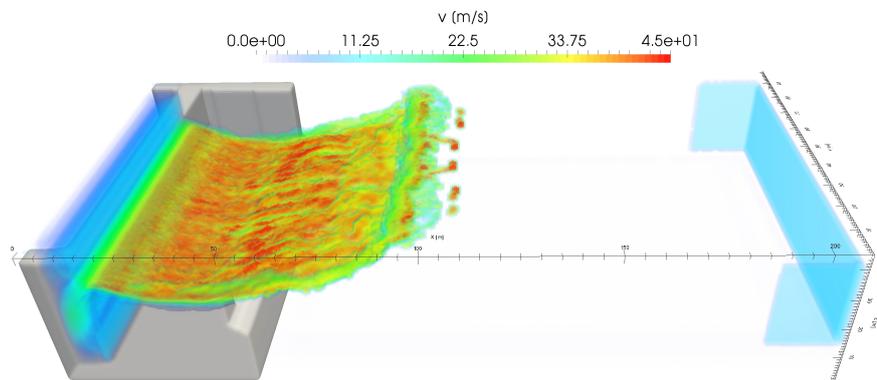


Figura 5.7: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

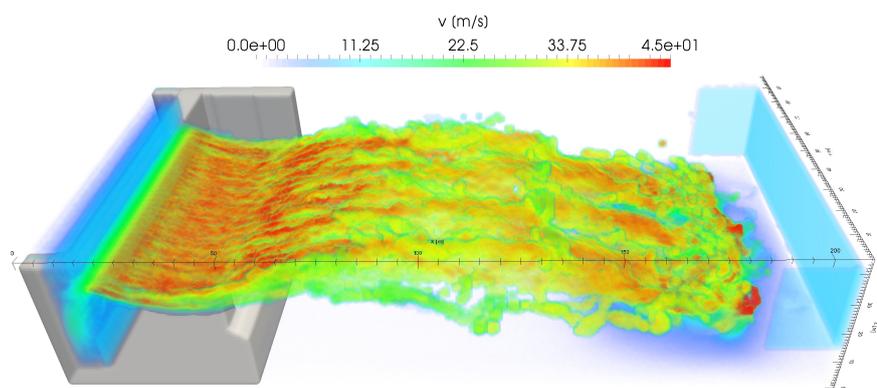


Figura 5.8: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

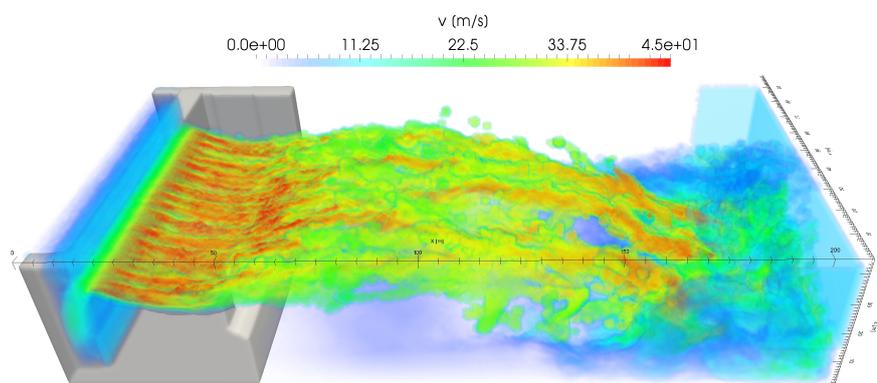


Figura 5.9: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.5.4 Andamento delle pressioni

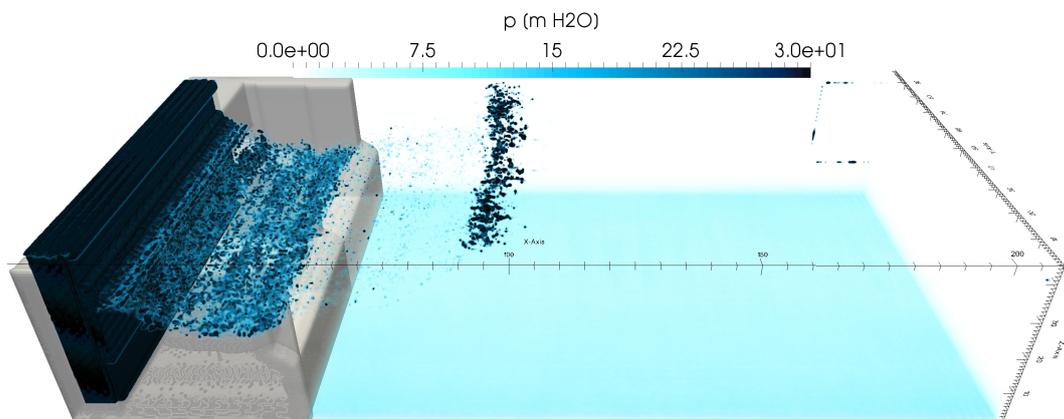


Figura 5.10: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

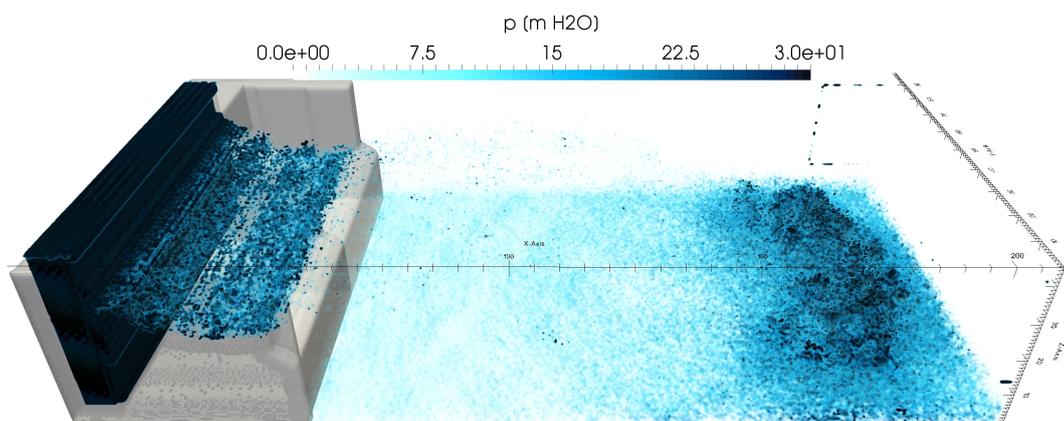


Figura 5.11: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

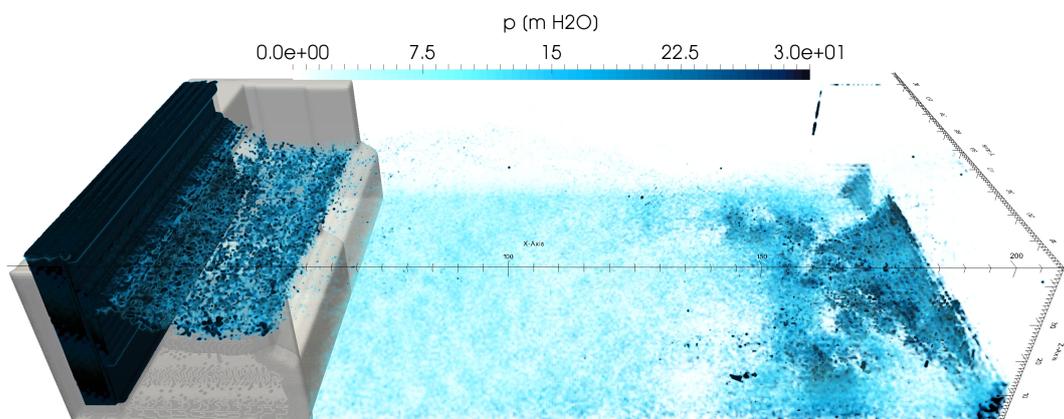


Figura 5.12: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.6 Simulazione 2

Differentemente dalla simulazione precedente, è stato scelto un dominio dimezzato nota la simmetria risultante dalla prima simulazione effettuata. Le dimensioni del dominio di calcolo sono $210 \times 50 \times 45$ [m] mentre il passo di discretizzazione resta identico al precedente con $\delta_x = 0.67m$. Nella parte sinistra sono state implementate 2 pareti di differente dimensione e poste alla stessa distanza longitudinale dall'origine [Fig.5.2]. Le dimensioni delle pareti sono pari a 10×88 [m] e 6×88 [m]. La velocità di ingresso del fluido è pari a 9.37 m/s, corrispondente ad una portata di 13200 m³/s. La posizione lungo l'asse [Z] delle pareti d'ingresso del fluido sono state studiate in modo da minimizzare le turbolenze dovute alla discontinuità sull'incile. È stato inoltre riempito il box di alimentazione per ridurre i tempi di simulazione. Il tirante iniziale risultante dall'analisi descritta in Fig.4.7 è di $h_0 = 4.5$ m. La condizione iniziale di altezza del tirante è stata simulata da una parete al disopra dello scivolo che manda in pressione il fluido in ingresso evidenziata in Fig.5.2, caratterizzata da una superficie inferiore parallela al canale con pendenza $i_f = 0.5$.

La parte finale dello sfioratore di superficie a salto di sci è composta da un canale con pendenza $i_f = 0.5$ e restringimento laterale sulla parete più esterna [Fig.5.3]. Per simulare la sezione di mezzeria è stata imposta una superficie di dimensioni costanti nella parte opposta al restringimento [Fig.5.3]. La parte terminale concava dello scivolo è caratterizzata da un primo tratto con raggio di curvatura R_1 di 35 m ed un'estensione di 27° ed un secondo con raggio di curvatura R_2 di 21.4 m di 35° di estensione. L'altezza di inversione dello scivolo si attesta a 3.87 m. A valle delle del dominio è stato simulato uno sfioro su tre lati posto ad un'altezza di 2.5 m dalla superficie libera della vasca di dissipazione e composto da 2 pareti di dimensioni 20×20 [m] ed una di dimensioni 20×50 [m]. La capacità di sfioro massima si attesta a 18000 m³/s.

L'imposizione dei seguenti parametri è risultata funzionale alla definizione delle caratteristiche idrodinamiche:

δ_x [m]	ν [m ² /s]	θ [°]	Bo []	C_{smago}	δ_t [s]	Δt [s]
0.6667	10^{-6}	100	59637	0.14	10^{-3}	14

Tabella 5.3: Parametri della Simulazione 1

5.6.1 Superficie libera

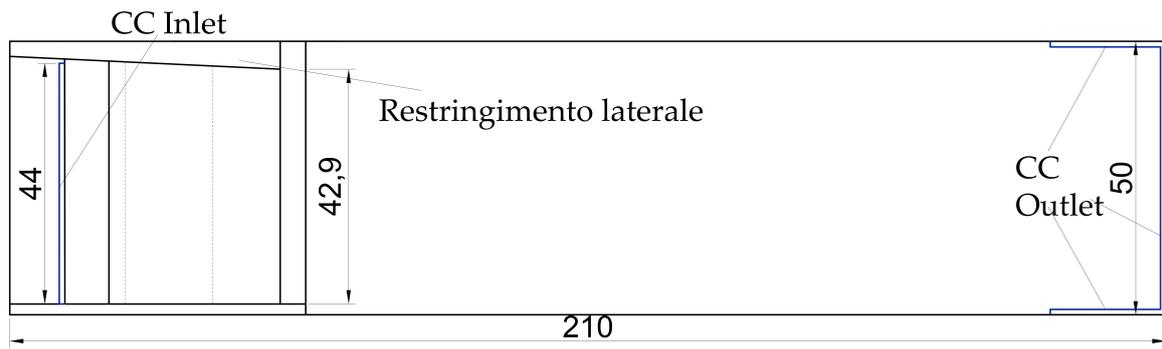


Figura 5.13: Geometria della simulazione 2 → Sezione piano [X Y].

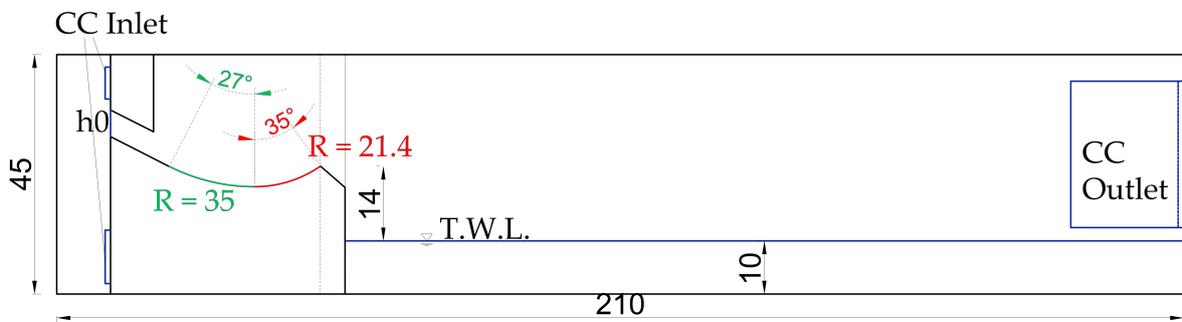
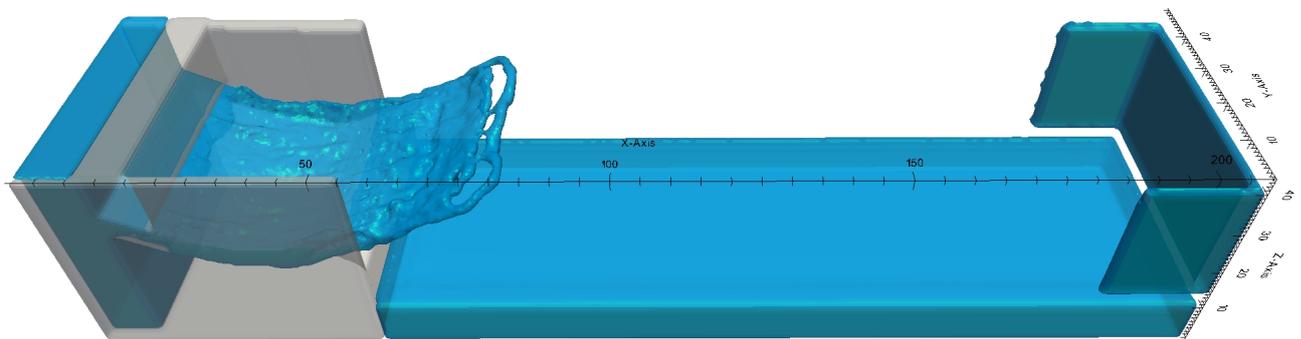
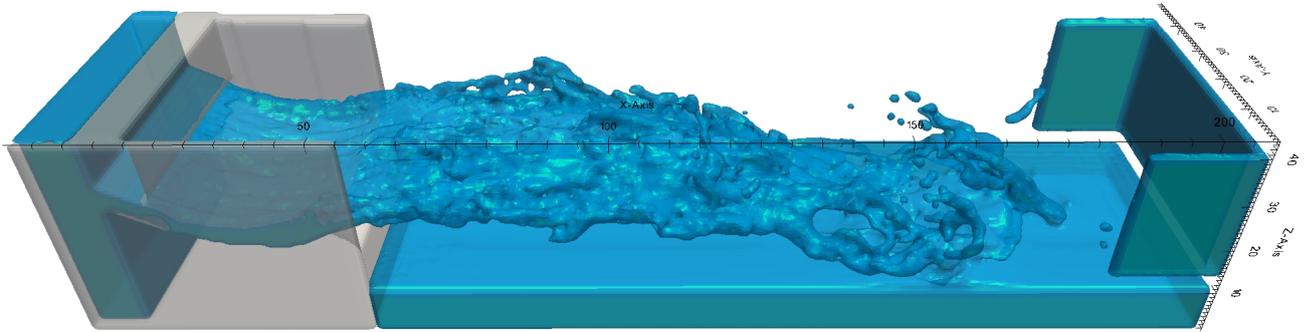


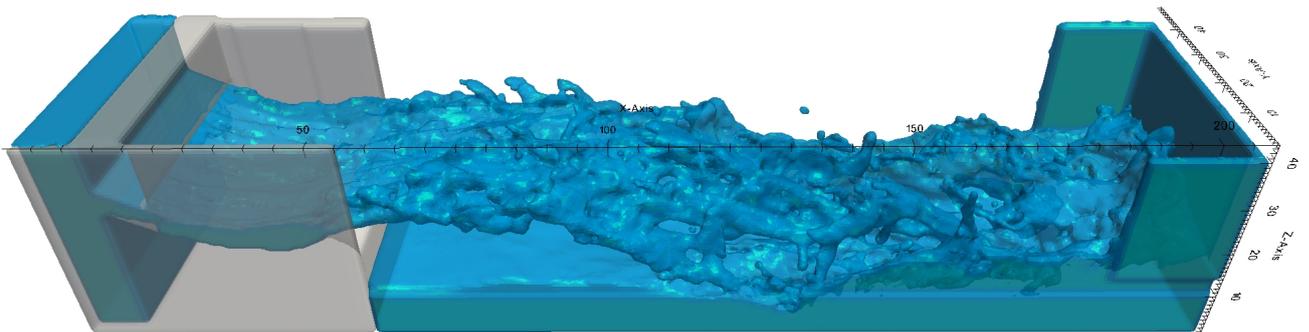
Figura 5.14: Geometria della simulazione 2 → Sezione piano [X Z].



Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi



Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi



Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.6.2 Andamento delle velocità

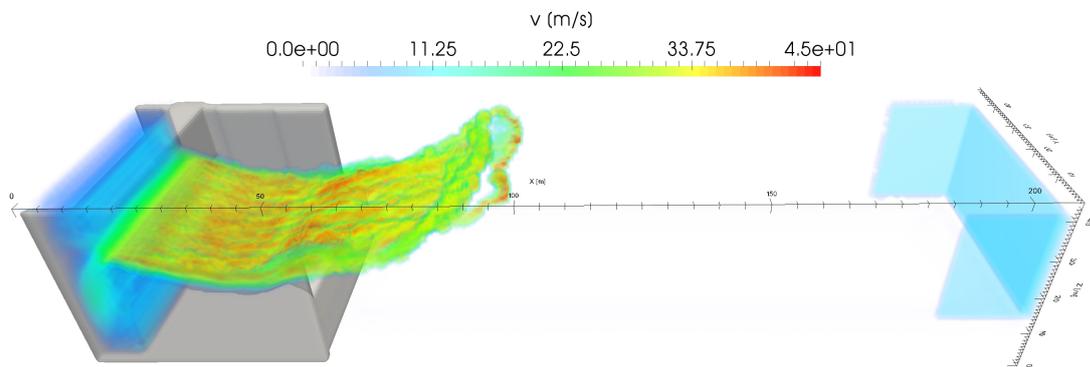


Figura 5.15: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

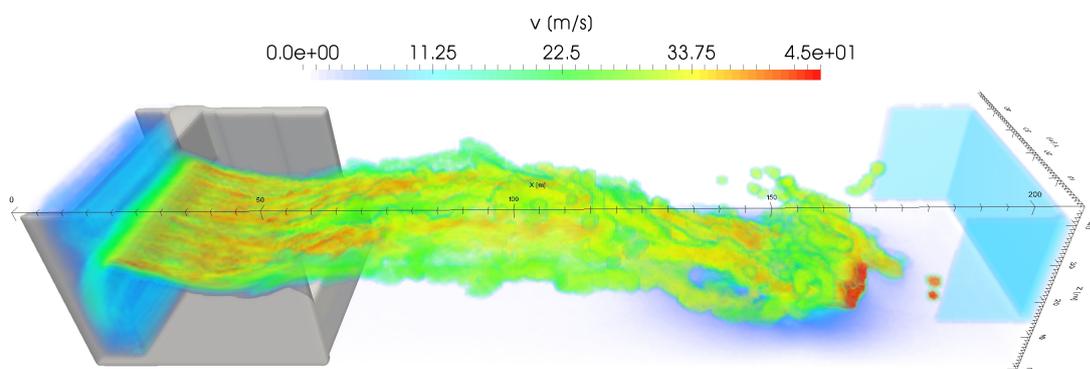


Figura 5.16: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

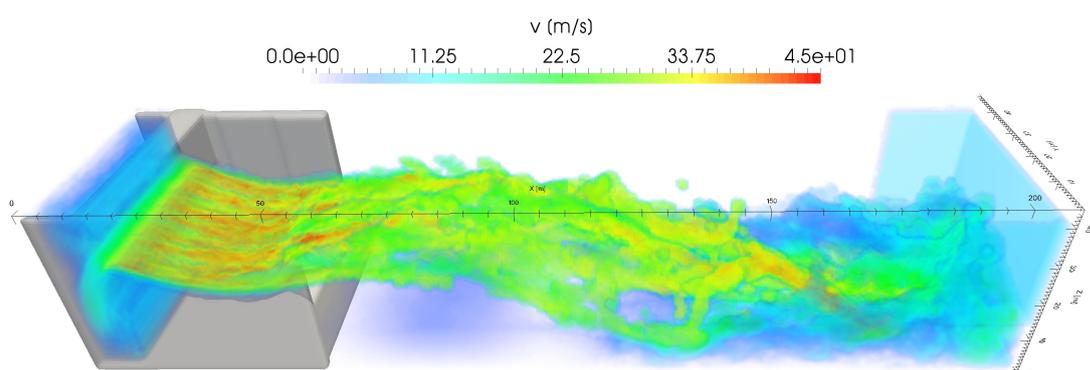


Figura 5.17: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.6.3 Andamento delle pressioni

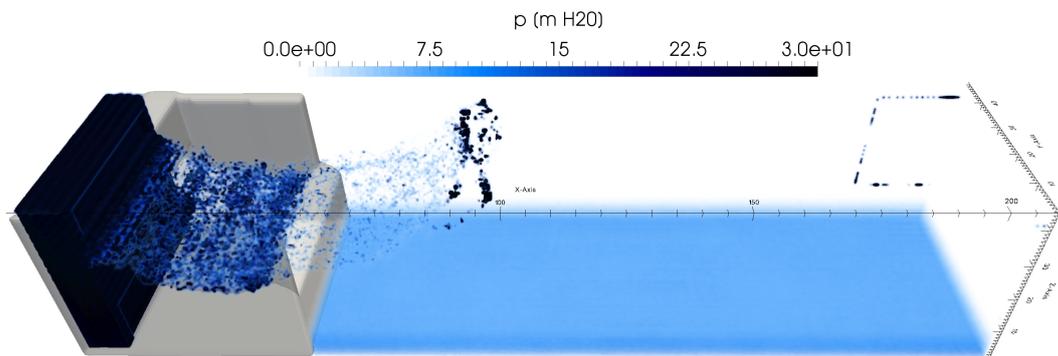


Figura 5.18: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

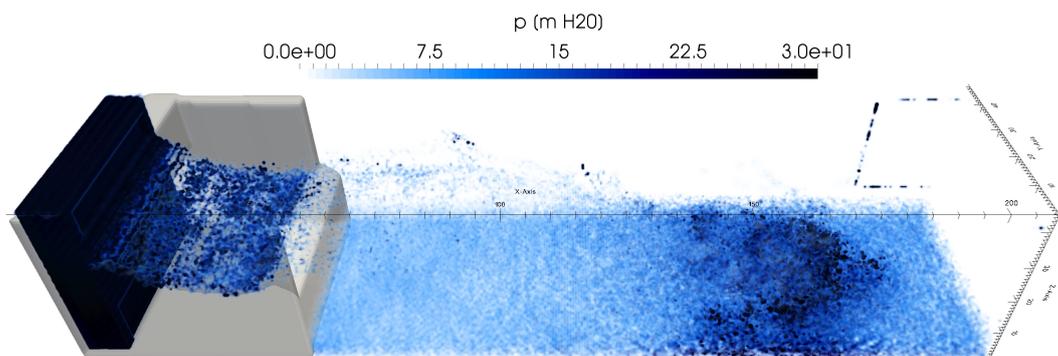


Figura 5.19: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

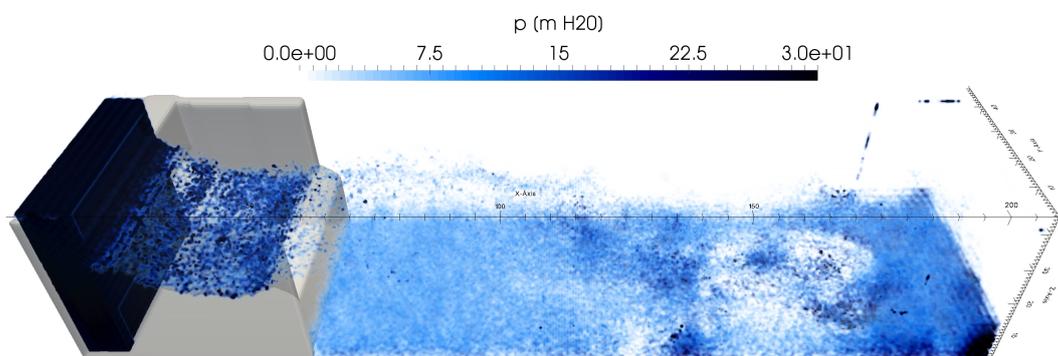


Figura 5.20: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7 Simulazione Finale

Per questa simulazione è stato scelto un passo δ_x di 0.5 m. Le dimensioni del dominio e la geometria implementata nel modello coincidono con quella definita nella *simulazione 2*: 210 x 50 x 45 [m] esposte in *Fig.5.13* e *Fig.5.14*.

Nella parte sinistra sono state implementate 2 pareti di dimensione 10 x 44 [m] e 6 x 44 [m]. Le velocità in ingresso del fluido si attestano a 9.37 m/s e 7.34 m/s corrispondenti rispettivamente alle portate Q_1 di 6600 m³/s e Q_2 di 5500 m³/s .

Variando la portata in ingresso, mediante lo studio descritto in *Fig.4.7*, sono state imposte nel modello di calcolo due condizioni di tirante: $h_{0Q_1} = 4.5$ m e $h_{0Q_2} = 4$ m. Le condizioni iniziali di altezza del tirante sono state simulate da una parete al disopra dello scivolo evidenziata in *Fig.5.3*, caratterizzata da una superficie inferiore parallela al canale con pendenza $if = 0.5$. A valle delle del dominio è stato simulato uno sfioro su tre lati posto ad un'altezza di 2,5 m dalla superficie libera della vasca di dissipazione e composto da 2 pareti di dimensioni 20 x 20 [m] ed una di dimensioni 20 x 50 [m]. La capacità di sfioro massima si attesta a 18000 m³/s.

L'imposizione dei seguenti parametri è risultata funzionale alla definizione delle caratteristiche idrodinamiche:

δ_x [m]	ν [m ² /s]	θ [°]	Bo []	C_{smago}	δ_t [s]	Δt [s]
0.5	10 ⁻⁶	100	33548	0.14	10 ⁻³	14

Tabella 5.4: Parametri della Simulazione 3

5.7.1 Superficie libera

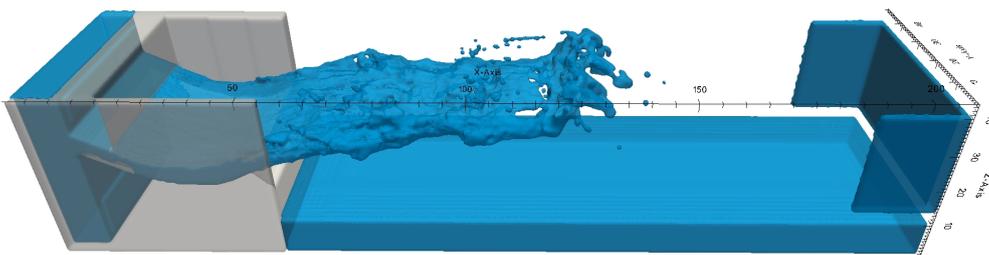


Figura 5.21: Simulazione della superficie libera con $Q = 13200$ m³/s all'istante $t = 3$ secondi

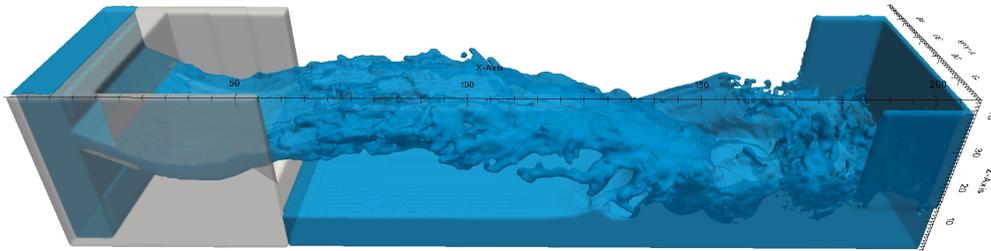


Figura 5.22: Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

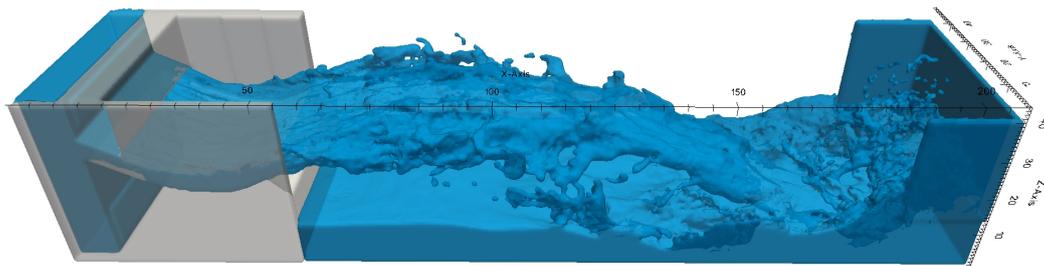


Figura 5.23: Simulazione della superficie libera con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7.2 Andamento delle velocità

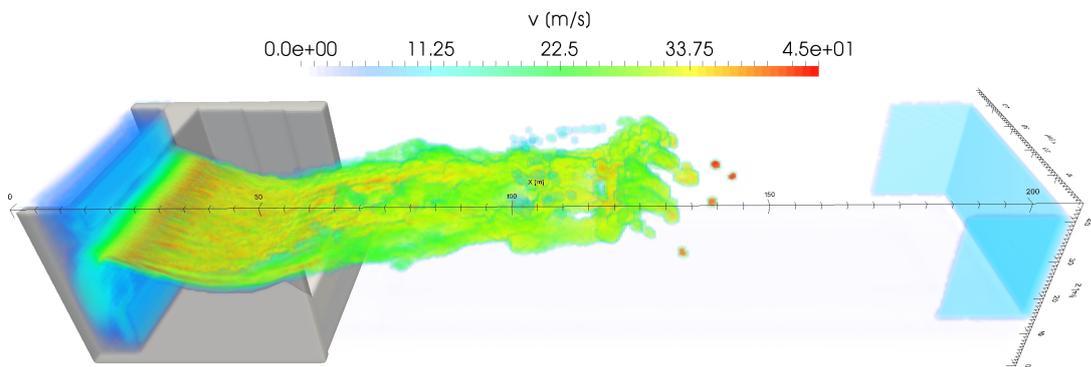


Figura 5.24: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

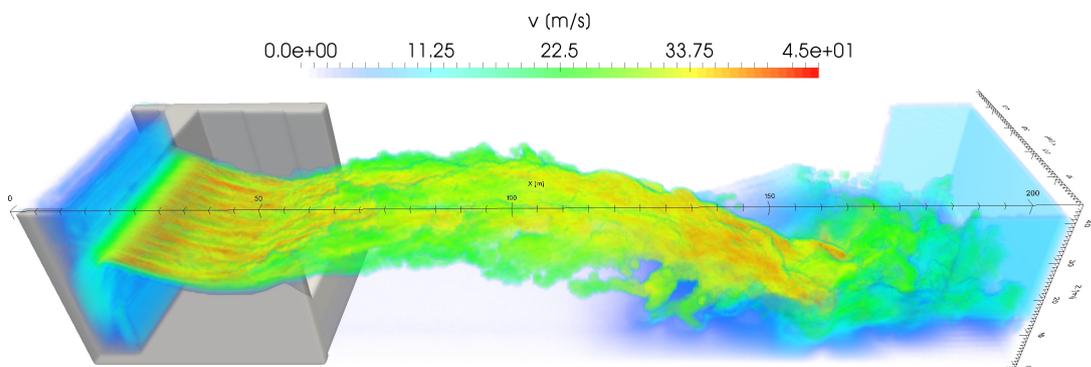


Figura 5.25: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

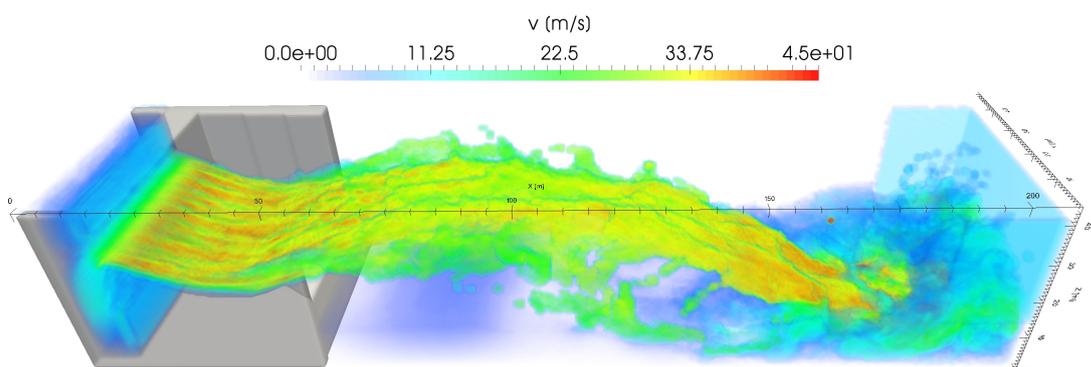


Figura 5.26: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7.3 Andamento delle pressioni

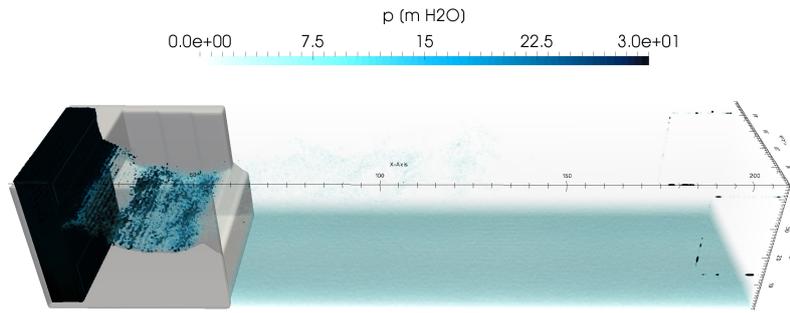


Figura 5.27: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

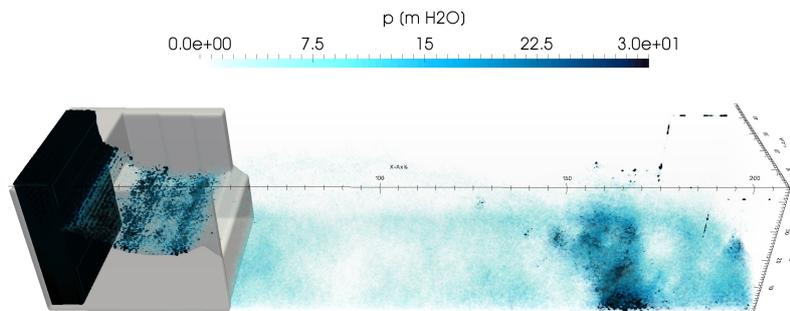


Figura 5.28: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

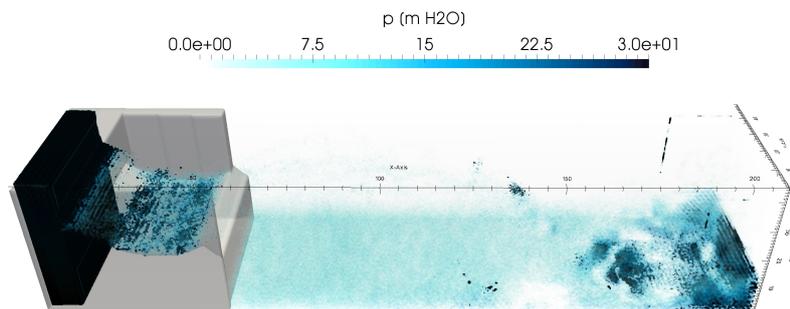


Figura 5.29: Simulazione della pressione con $Q = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7.4 Superficie libera

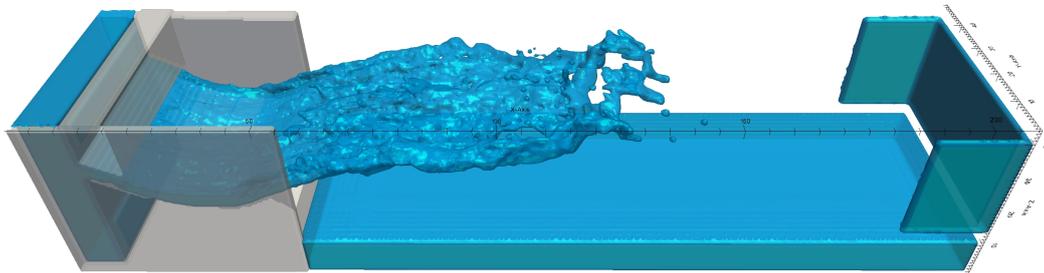


Figura 5.30: Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

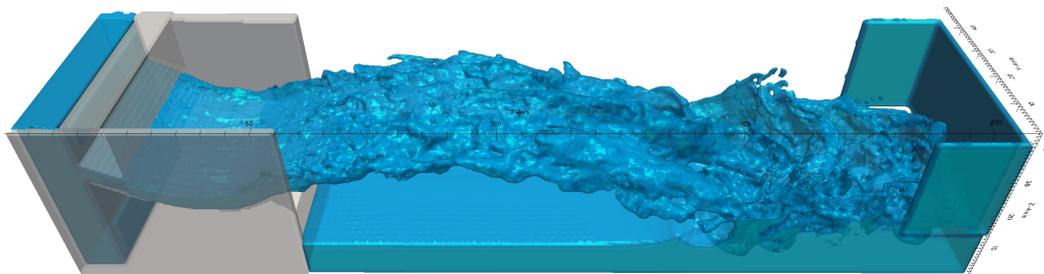


Figura 5.31: Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

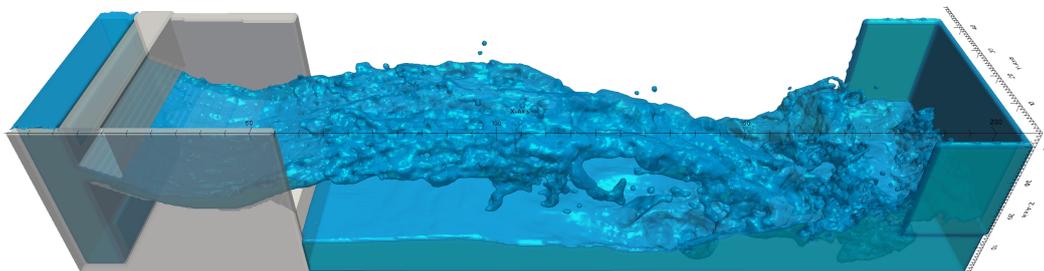


Figura 5.32: Simulazione della superficie libera con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7.5 Andamento delle velocità

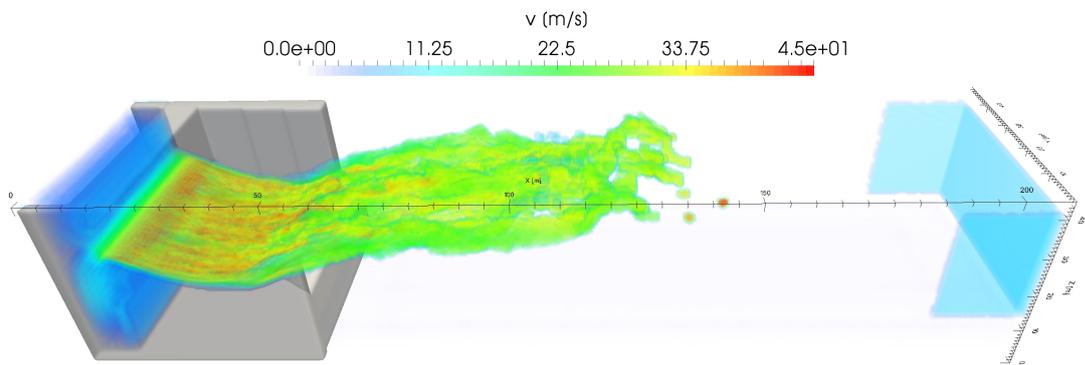


Figura 5.33: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

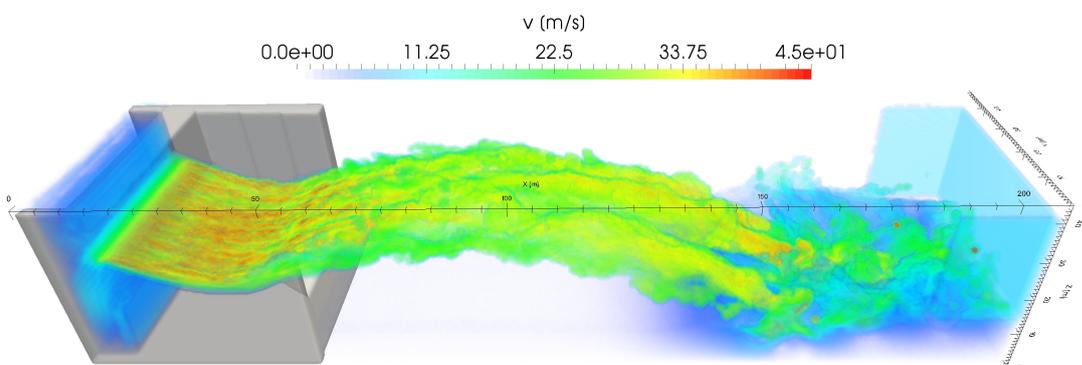


Figura 5.34: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

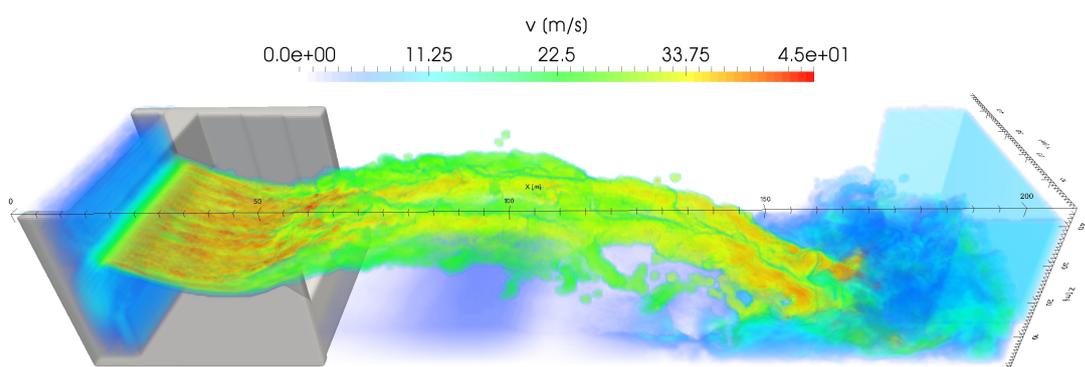


Figura 5.35: Simulazione del modulo di velocità con $Q = 11000 \text{ m}^3 / \text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

5.7.6 Andamento delle pressioni

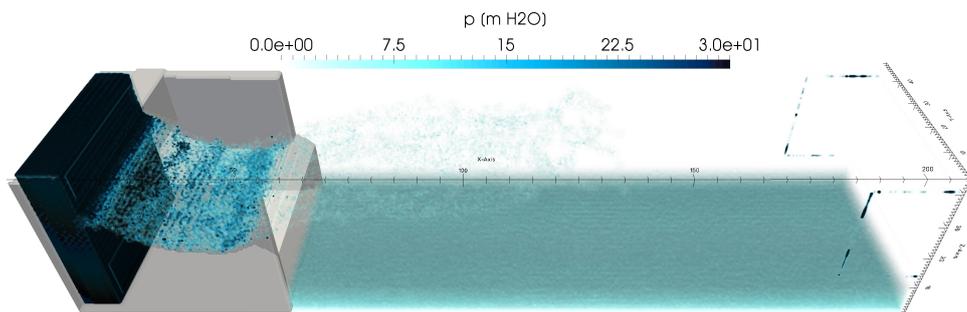


Figura 5.36: Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 3$ secondi

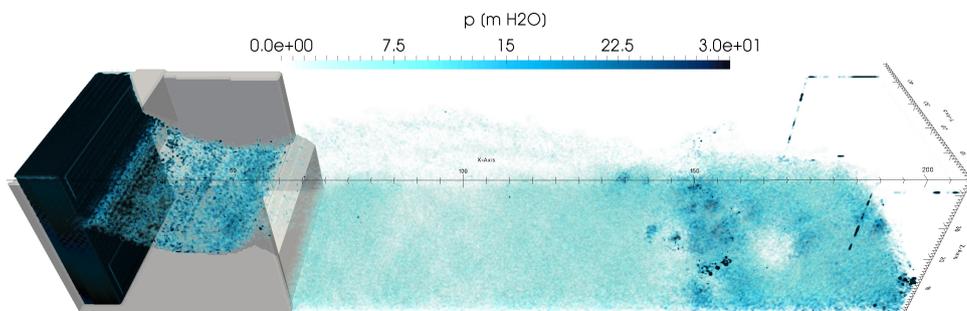


Figura 5.37: Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 6$ secondi

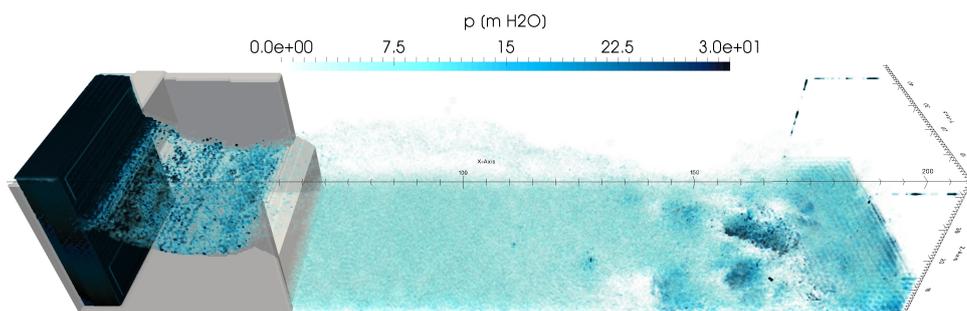


Figura 5.38: Simulazione della pressione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$ all'istante $t = 12$ secondi

ANALISI DELLE SIMULAZIONI

Questa sezione propone la valutazione delle proprietà fluidodinamiche ricavate dalle simulazioni al fine di stimare l'ampiezza longitudinale e trasversale dell'impronta di scavo prodotta dal getto sul fondo della vasca di dissipazione. Le grandezze A_i , v_i , α_i , p_b e v_b delle simulazioni 1 e 2 saranno oggetto di analisi. Verrà valutata la possibilità di riduzione del dominio di calcolo mediante confronti di tali grandezze su una porzione di volume confrontabile. Si procederà quindi all'analisi approfondita della simulazione finale che racchiude lo spettro delle grandezze caratteristiche del getto.

6.1 Analisi Simulazione 1 e 2

6.1.1 Area di impatto A_i

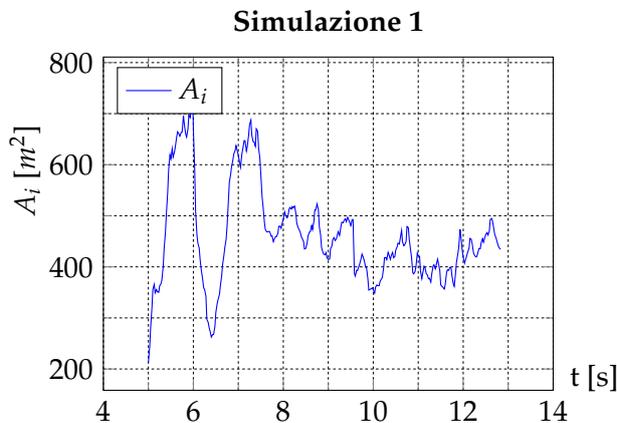


Figura 6.1: *Variazione temporale dell'area della superficie libera entrante nella vasca di dissipazione a quota 4m O.TW.L.*

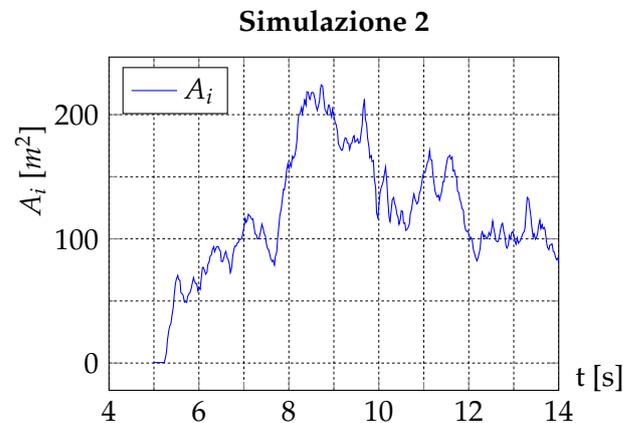


Figura 6.2: *Variazione temporale dell'area della superficie libera entrante nella vasca di dissipazione a quota 4m O.TW.L.*

Dal confronto dei due grafici Fig.6.1 e Fig.6.2 si evince una riduzione del dominio di calcolo di 1/3, ciò a causa della parete simulante la condizione di simmetria in mezzeria. Le informazioni contenute all'interno della fascia compresa tra la mezzeria ed una distanza di 15 m, sono state scartate poiché troppo influenzate dalla condizione al contorno. L'analisi dinamica dell'area d'ingresso delle due figure ha all'incirca lo stesso andamento: una parte iniziale in

cui si rileva una zona di picco ed una parte tendente alla stazionarietà superato un transitorio di 3 secondi. La valutazione dell'area di impatto è avvenuta analizzando l'intersezione della superficie libera del getto su di un piano posto a +4 m O.TW.L¹

6.1.2 Velocità d'impatto v_i

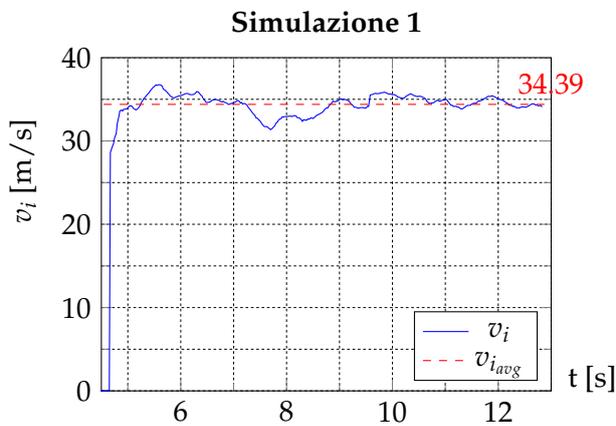


Figura 6.3: *Variazione temporale della velocità d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4m O.TW.L.*

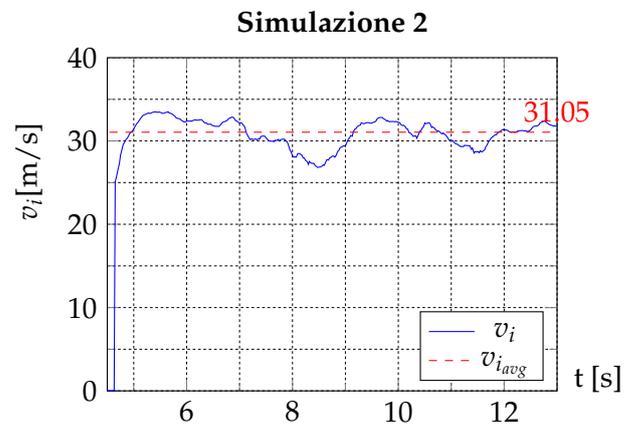


Figura 6.4: *Variazione temporale della velocità d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.*

I due grafici sono il risultato dalle intersezioni della superficie libera del getto attraverso una superficie posta a 4 m O.TW.L.¹ Analizzando il dato medio nel tempo v_{avg} , nei due grafici si denota una v_{avg} maggiore nella Fig.6.3 rispetto alla risultante in Fig.6.4. Ciò è dovuto al dominio considerato: mentre nella prima simulazione entrano in gioco anche le velocità in corrispondenza della mezzeria, nella simulazione 2 vengono mediate le velocità della parte più esterna del getto, caratterizzata da velocità più basse come visibile dal confronto delle Fig.5.16 e Fig.5.26. I risultati sono stati elaborati in Matlab[®] ed omessi nel presente lavoro.

6.1.3 Angolo medio d'impatto α_i

Il risultato evidente nelle Fig.6.5 e Fig.6.6 è quello di avere lo stesso andamento temporale di variazione dell'angolo di impatto medio. L'ottenimento dei dati è scaturito da una sezione posta a +4 m della superficie libera della vasca di dissipazione ed analizzando l'angolo d'ingresso dalla velocità α_i , calcolato con la seguente relazione trigonometrica a valle di una media nel piano [X Y]:

$$\alpha_i = \arccos \left(\frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_z^2}} \right)$$

in cui v_x e v_z sono le componenti della v_i rispettivamente lungo la direzione x e z . La Fig.6.5 mostra un $\alpha_{i,avg}$ inferiore rispetto a quello della Fig.6.6 generato dalla riduzione del dominio. Il

¹L'analisi non viene effettuata sul piano della superficie libera a causa delle masse d'acqua random che, entrando a contatto con la superficie di analisi, generano dei valori errati nella determinazione delle grandezze.

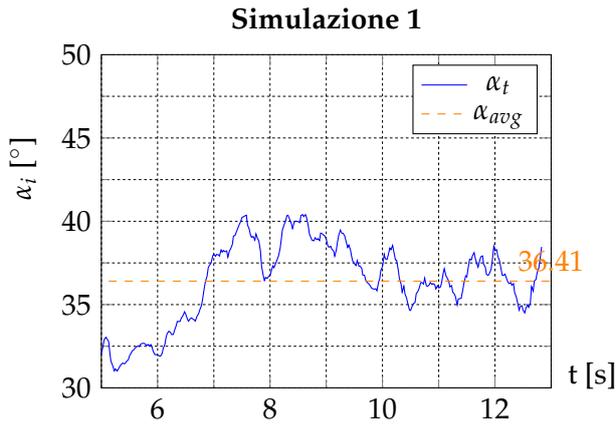


Figura 6.5: *Variazione temporale dell'angolo d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.*

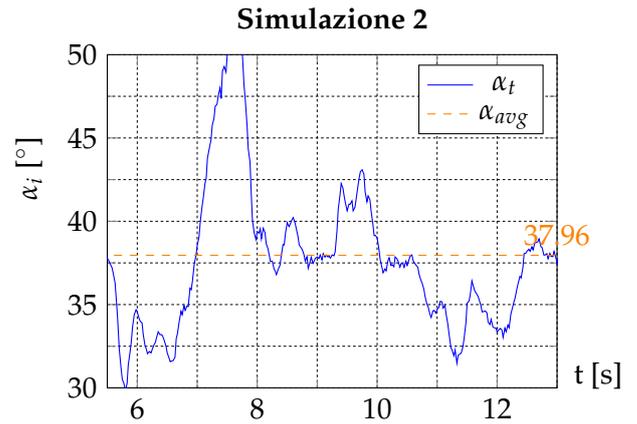


Figura 6.6: *Variazione temporale dell'angolo d'impatto entrante nella vasca di dissipazione a quota +4 m O.TW.L.*

dato relativo alla *simulazione 1* è in linea con la fisica del problema: nella parte centrale del getto si ha una riduzione dell'angolo d'impatto, mentre procedendo verso l'esterno, l'ingresso del fluido avviene con un angolo maggiore. L'andamento delle velocità è in linea con questi risultati facendo corrispondere a velocità maggiori, angoli di ingresso minori. Conseguentemente, analizzando la parte estrema del getto con velocità minori, l'angolo $\alpha_{i_{avg}}$ risulterà maggiore come mostrato in Fig.6.6.

6.1.4 Pressioni dinamiche sul fondo p_b della vasca di dissipazione

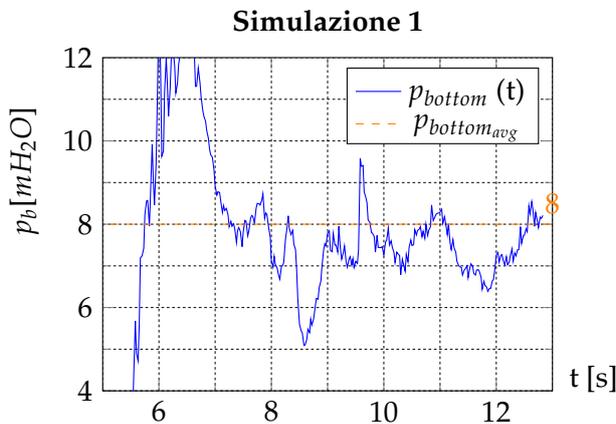


Figura 6.7: *Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a z = -9 m O.TW.L.*

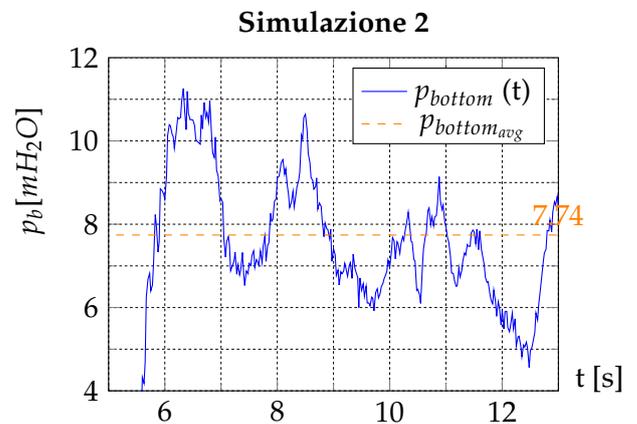


Figura 6.8: *Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a z = -9 m O.TW.L.*

Il grafico in Fig.6.7 mostra l'andamento dinamico della pressione sul fondo della vasca di dissipazione. A fronte di un valore di impatto iniziale elevato per i primi 1.5 secondi, si ha una stabilizzazione della componente dinamica della pressione ad un valore di circa 8 m di

colonna d'acqua. L'andamento descritto nella Fig.6.8 denota un comportamento più uniforme della pressione.

6.1.5 Velocità medie v_b sul fondo della vasca di dissipazione

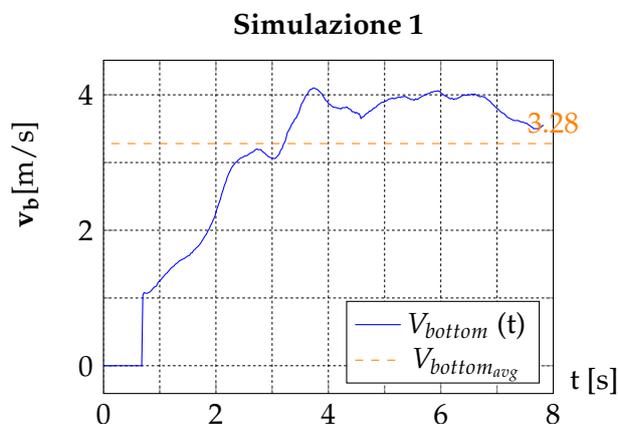


Figura 6.9: Andamento temporale del modulo di velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -8$ m O.T.W.L.

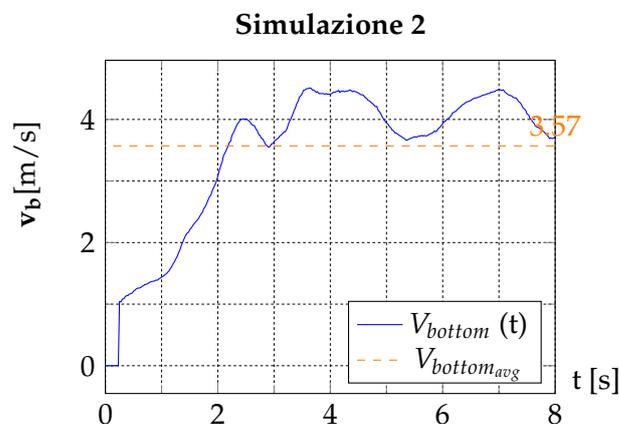


Figura 6.10: Andamento temporale del modulo di velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -8$ m O.T.W.L.

L'andamento temporale delle velocità sul fondo della vasca di dissipazione posta a servizio dello sfioratore di superficie a salto di sci nelle due simulazioni effettuate, è visibile nei grafici Fig.6.9 e Fig.6.10. L'aumento progressivo della velocità sul fondo risulta simile nelle due simulazioni tant'è che le velocità medie risultanti differiscono di valori dell'ordine dei decimi. Tale risultato porta a concludere che l'incidenza della riduzione del dominio di calcolo influisce poco sulla determinazione della velocità sul fondo.

6.2 Validazione dell'approssimazione sulla simmetria del dominio

Scopo della sezione è di confrontare la stessa porzione di volume tra le simulazioni 1 e 2 per avere delle informazioni dirette riguardo le differenze dovute alla riduzione del dominio di calcolo.

6.2.1 Confronto sull'area d'ingresso

Valutando il grafico Fig.6.11, si nota come la variazione nel tempo dell'area, espressa in m^2 , abbia lo stesso andamento in entrambe le simulazioni. A fronte di un'espansione iniziale dell'area del getto, tale grandezza diminuisce tendendo al valore di $100 m^2$. L'andamento della grandezza nelle due simulazioni è evidentemente simile, ciò suggerisce la possibilità di riduzione del dominio.

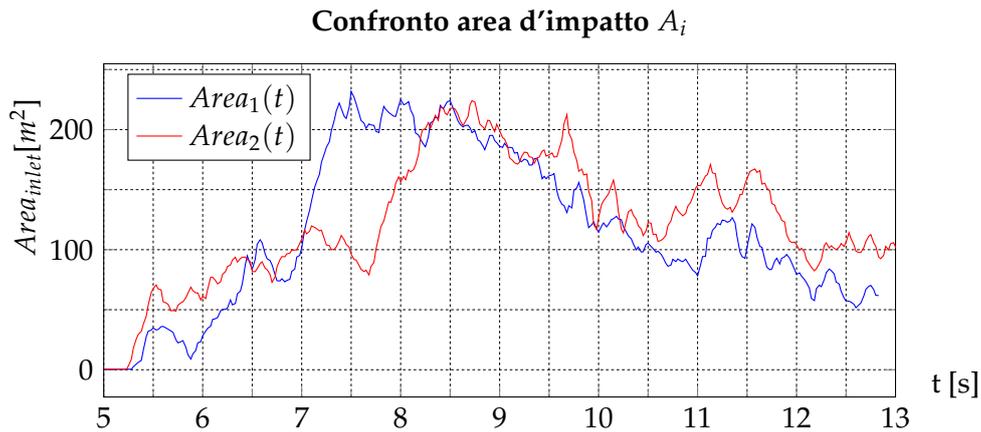


Figura 6.11: Andamento nel tempo della variazione dell'area di impatto A_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L.

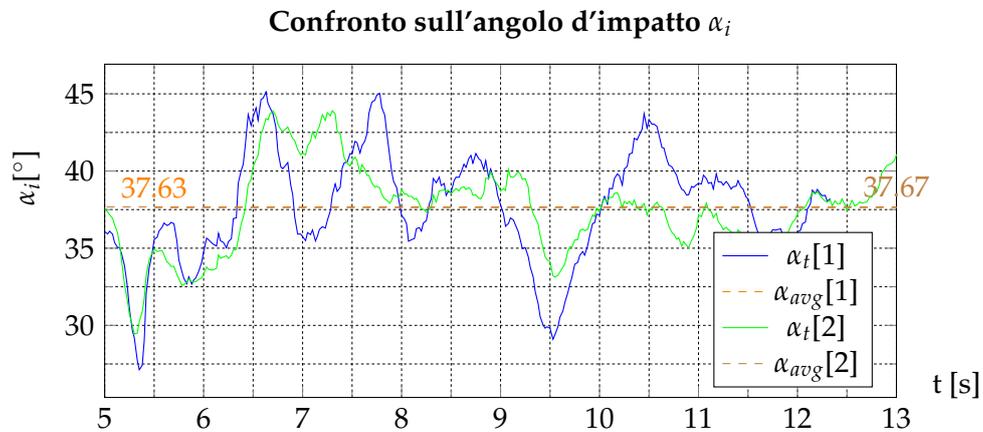


Figura 6.12: Andamento nel tempo della variazione dell'angolo di impatto α_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L.

6.2.2 Confronto sull'angolo d'impatto α_i

Sulla stessa linea teorica descritta nel paragrafo 6.2.1, è stata affrontata la valutazione della variazione nel tempo dell'angolo di impatto su un piano posto a 4 m dal piano della superficie libera della vasca di dissipazione. Tale scelta è stata proposta a causa della presenza di elementi di superficie libera presenti nella sezione di studio non facenti parte del getto entrante. Oltre ad un andamento simile del valore di α_i in entrambe le simulazioni, i valori medi rispettivi risultano identici come mostrato in Fig.6.12.

6.2.3 Confronto dell'analisi temporale della velocità d'impatto v_i

Nel grafico di Fig.6.13, l'andamento delle velocità di impatto v_i , valutato con le modalità dei confronti precedenti, tende verso valori simili. La media delle velocità d'impatto avvalorava l'ipotesi di poter trascurare le implicazioni dovute al dimezzamento del dominio di calcolo.

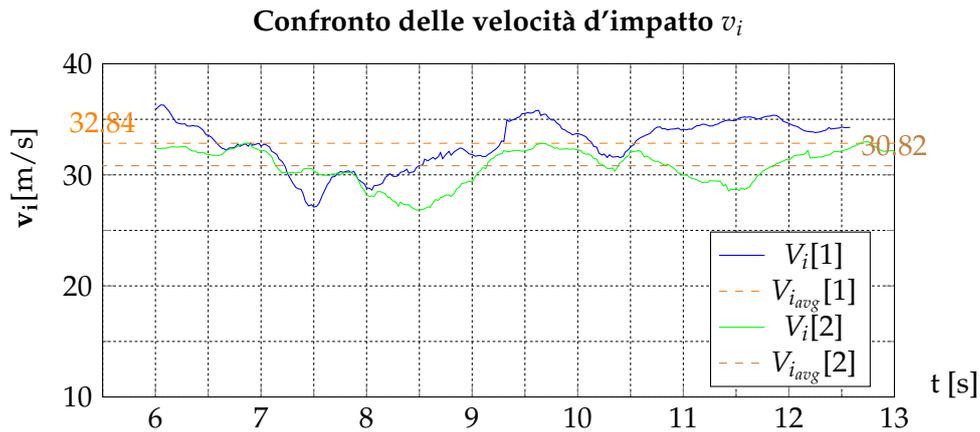


Figura 6.13: Andamento nel tempo della variazione dell'angolo di impatto α_i nelle due simulazioni effettuate preliminarmente. Il piano di indagine è posto ad un'altezza di 4 m O.TW.L.

Inoltre va notato che non ci sono sensibili variazioni della grandezza rispetto alla media dei valori.

6.2.4 Confronto dell'analisi temporale della pressione dinamica sul fondo

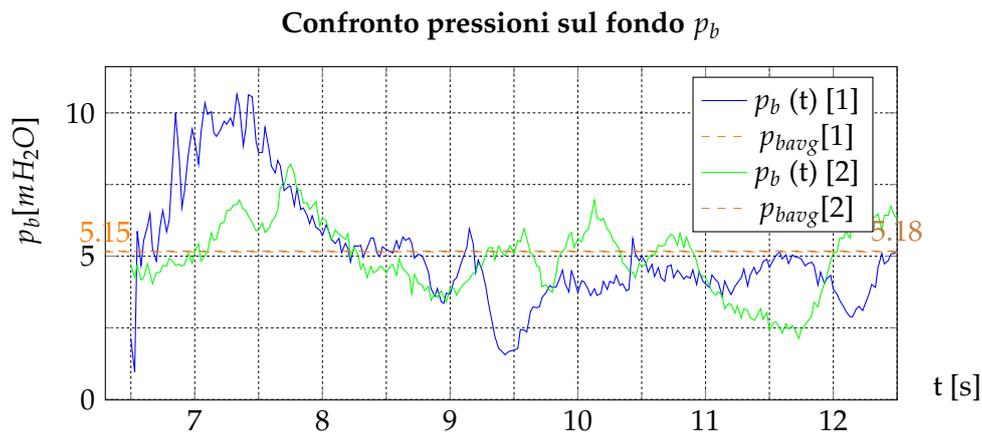


Figura 6.14: Andamento nel tempo della variazione della pressione dinamica sul fondo della vasca di dissipazione p_b nelle due simulazioni effettuate preliminarmente.

La Fig.6.14 mostra un andamento simile della pressione dinamica sul fondo nelle due simulazioni a confronto. Anche se negli istanti temporali prossimi all'impatto del getto il valore della pressione dinamica risulta differente, l'andamento a regime fa presupporre una buona corrispondenza tra le due simulazioni. Ciò esposto è anche supportato dal dato relativo alla pressione media dinamica $p_{b,avg}$ che, ambo i casi, risulta identica a meno di valori centesimali. Da questo grafico si evince che la pressione dinamica sul fondo mediata nel tempo non risente della riduzione del dominio di calcolo.

6.2.5 Confronto dell'analisi della velocità sul fondo

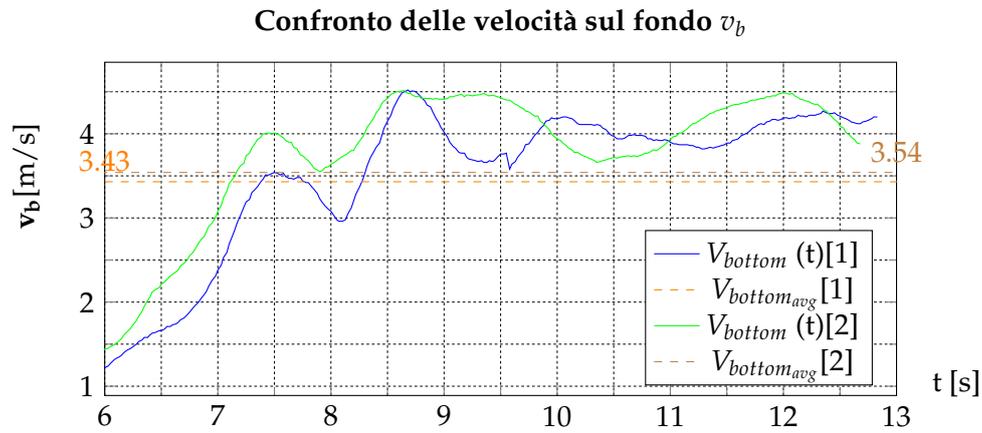


Figura 6.15: Andamento nel tempo della variazione del modulo della velocità fondo della vasca di dissipazione v_b nelle due simulazioni effettuate preliminarmente.

Analogamente ai risultati precedenti, per l'andamento nel tempo della velocità sul fondo v_b evidente in Fig.6.15, la riduzione del dominio di calcolo non comporta una variazione sostanziale della grandezza analizzata.

6.3 Analisi Simulazione Finale

A valle dei confronti effettuati tra le *Simulazione 1* e *Simulazione 2* è possibile ritenere valida l'ipotesi di simmetria. Di conseguenza si è proceduto alla valutazione delle grandezze idrodinamiche con un dimezzamento del dominio calcolo. Grazie a tale riduzione, è stato possibile infittire il passo di discretizzazione al fine di valutare con maggiore dettaglio l'idrodinamica del processo.

6.3.1 Area d'impatto A_i

Con la pretesa di valutare la variazione temporale dell'area d'impatto del fluido con la superficie libera, è stata effettuata un'adimensionalizzazione rispetto all'area A_0 : area della porzione di fluido generata dall'intersezione della stessa con un piano [Y Z] posto ad una distanza [X] dall'origine coincidente con la parte terminale del salto di sci.¹

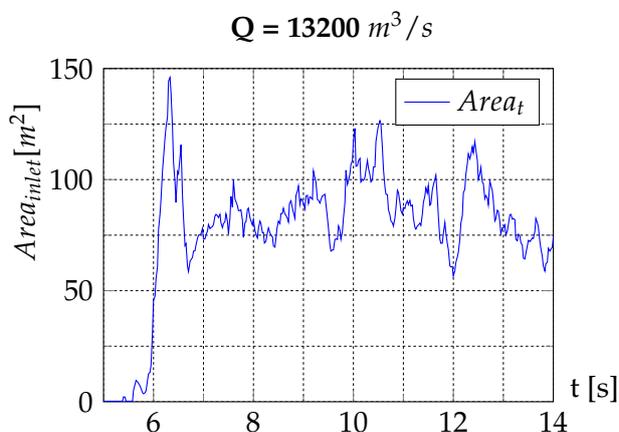


Figura 6.16: Piano di ispezione posto in corrispondenza della superficie libera della vasca di dissipazione. $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

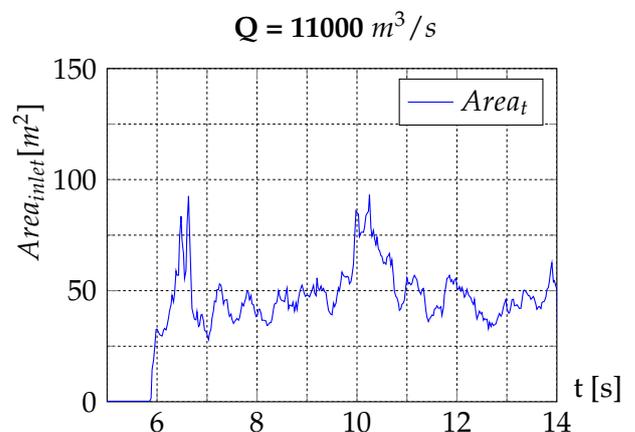


Figura 6.17: Piano di ispezione posto in corrispondenza della superficie libera della vasca di dissipazione. $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

6.3.2 Angolo medio d'impatto α_i

La valutazione sperimentale dello scavo prodotto da uno sfioratore di superficie a salto di sci passa attraverso la simulazione in laboratorio di getti fluidi entranti nella vasca di dissipazione con un angolo ben definito [S. Pagliara 2010]. Di qui un incentivo per la valutazione dell'angolo d'ingresso del getto. In prima approssimazione sono stati valutati gli angoli di ingresso α_{lo} , α_{hi} in relazione alla variazione infinitesima della superficie libera. Consecutivamente, la variazione temporale dell'inclinazione media del getto è stata valutata attraverso il vettore velocità, ponendo l'attenzione lungo le direttrici generate dall'intersezione del piano della superficie libera della vasca di dissipazione con piani [X Z] posti a distanza [Y] = 15; 20; 25; 30; 35; 40 m dal-

¹Lo studio analitico e la determinazione dei valori medi sono stati effettuati a partire da un istante temporale significativo per lo studio della grandezza di interesse.

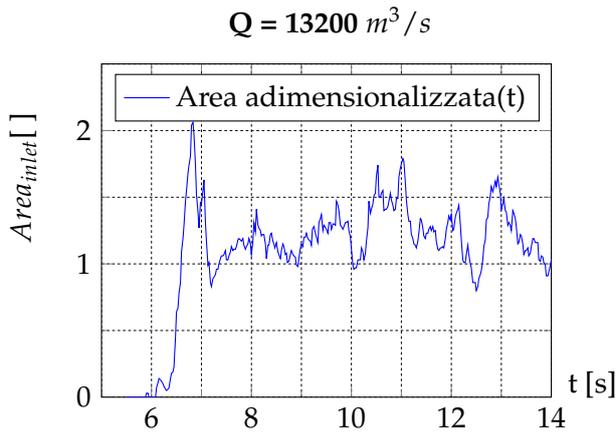


Figura 6.18: Area adimensionalizzata su A0; Z = 0 m O.TW.L.

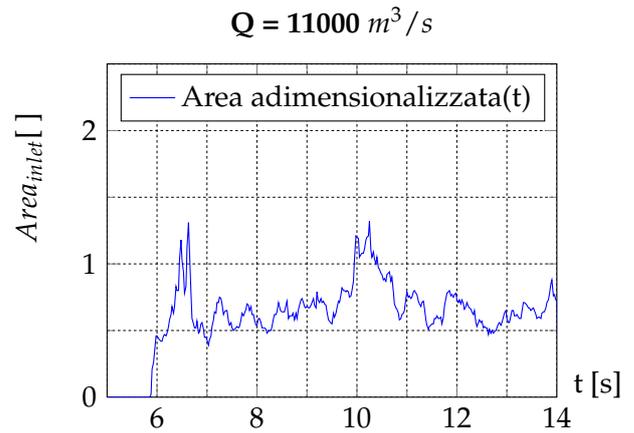


Figura 6.19: Area adimensionalizzata su A0; Z = 0 m O.TW.L.

la parete di simmetria. Il risultato atteso prevede una differenziazione dell'angolo d'ingresso al variare della distanza dall'asse di simmetria.¹

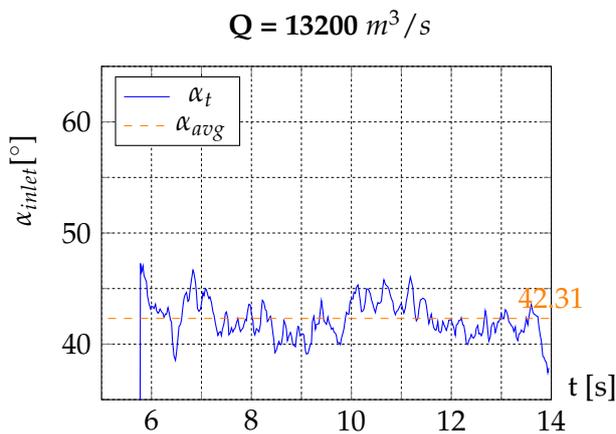


Figura 6.20: α_i distanza dalla mezzeria $y = 15$ m; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

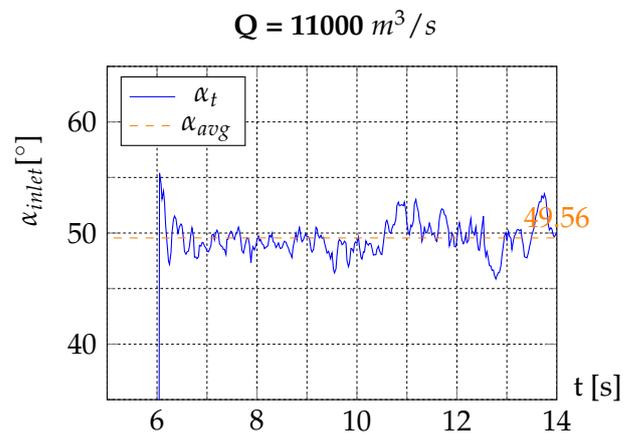


Figura 6.21: α_i distanza dalla mezzeria $y = 15$ m; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

Dall'analisi dei due grafici in Fig.6.31 e Fig.6.30 si evince come per portate maggiori, l'angolo di impatto rispetto all'orizzontale assuma valori minori. Nello specifico, α_i per portate dell'ordine di $13200 \text{ m}^3/\text{s}$ ha un valore medio di circa 44° . Per la portata inferiore di $11000 \text{ m}^3/\text{s}$ l'angolo aumenta al valore medio di 48.5° rispetto all'orizzontale.

¹I grafici sono stati volutamente non filtrati, i valori che si discostano notevolmente dalla media calcolata sono dovuti alla presenza di vettori velocità estranei al getto ed appartenenti a masse random di superficie libera che colpiscono la superficie di sezione

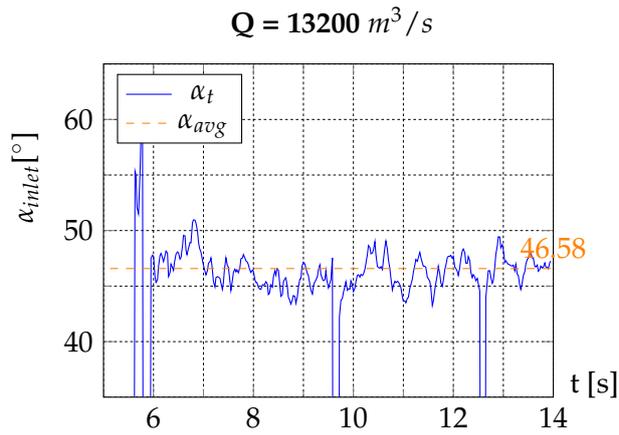


Figura 6.22: α_i distanza dalla mezzeria $y = 20 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

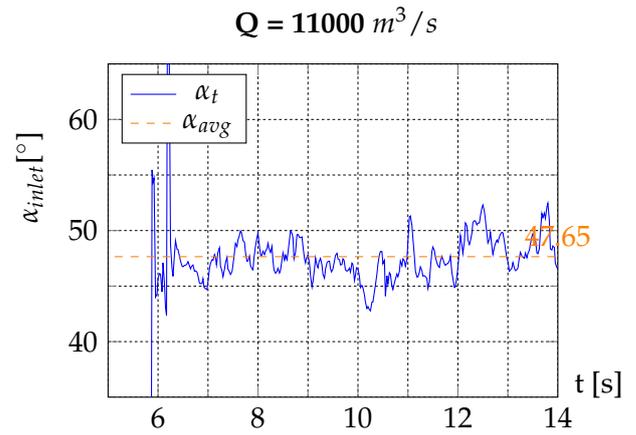


Figura 6.23: α_i distanza dalla mezzeria $y = 20 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

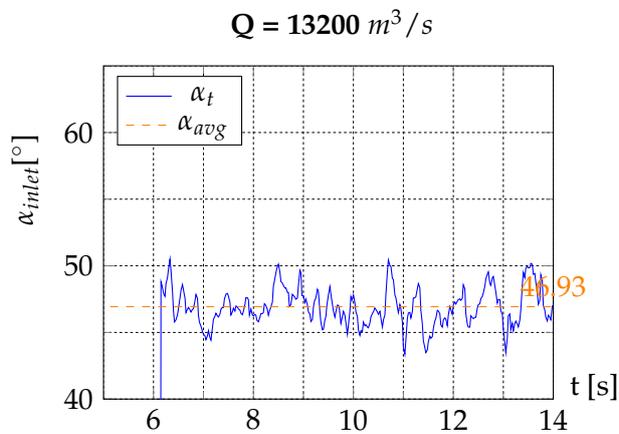


Figura 6.24: α_i distanza dalla mezzeria $y = 25 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

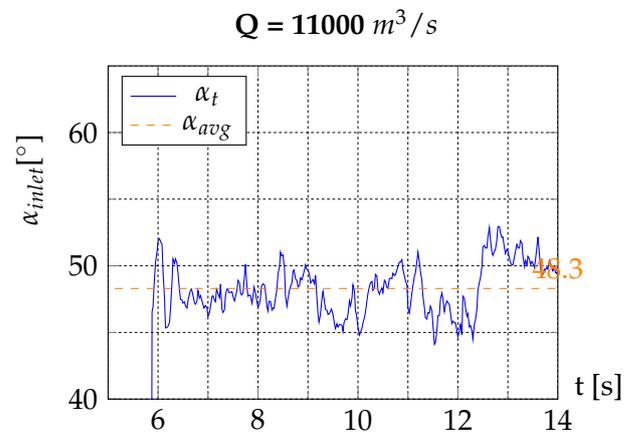


Figura 6.25: α_i distanza dalla mezzeria $y = 25 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

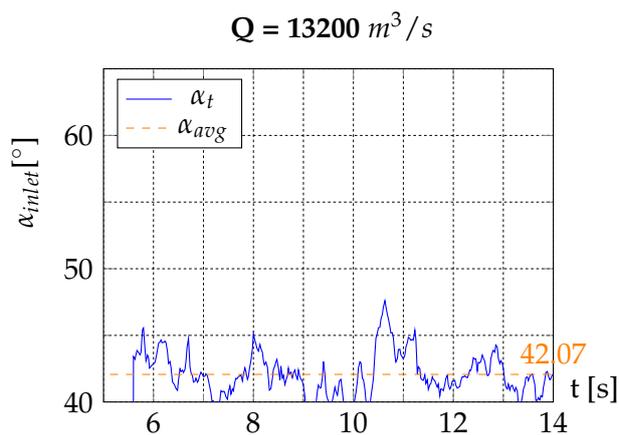


Figura 6.26: α_i distanza dalla mezzeria $y = 30 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

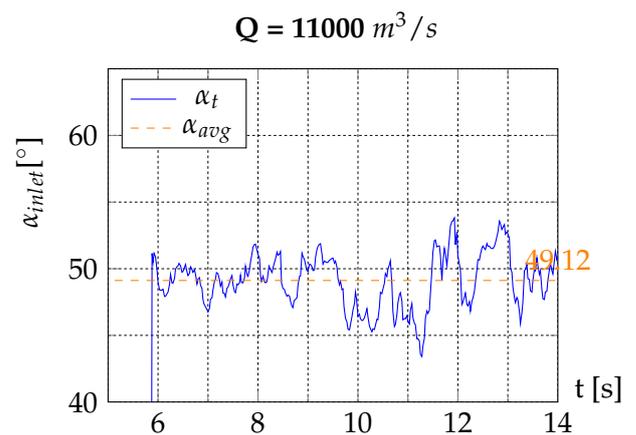


Figura 6.27: α_i distanza dalla mezzeria $y = 30 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

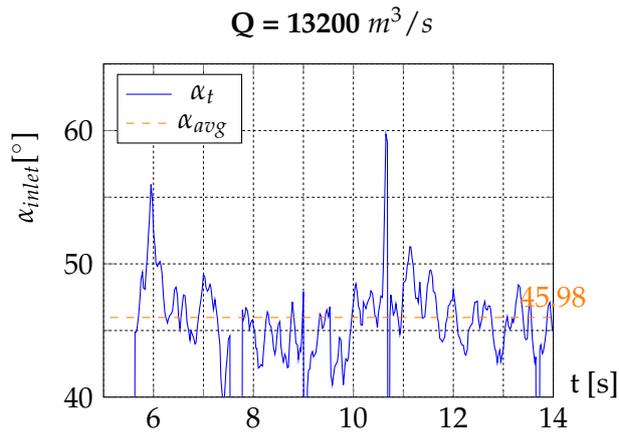


Figura 6.28: α_i distanza dalla mezzeria $y = 35 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

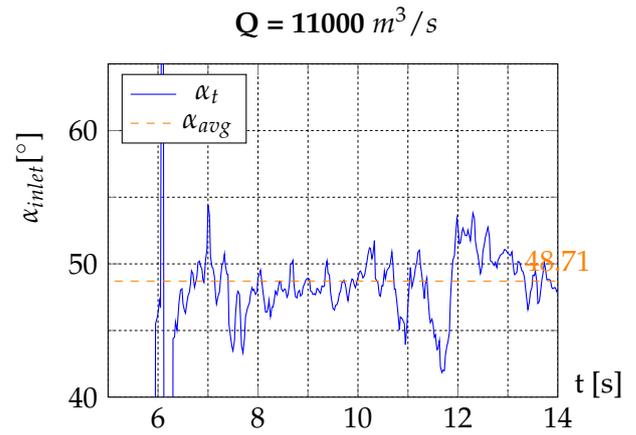


Figura 6.29: α_i distanza dalla mezzeria $y = 35 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

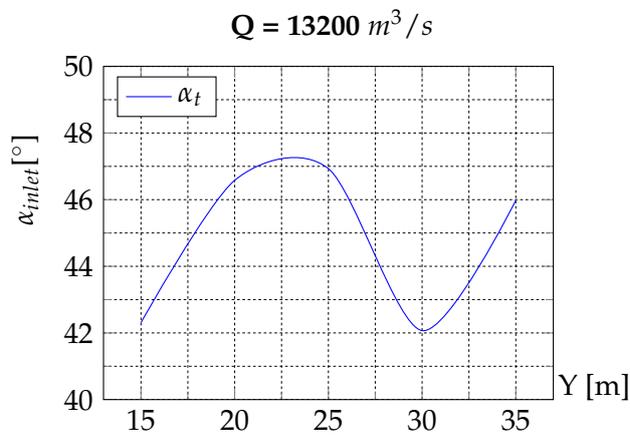


Figura 6.30: Dati medi dell'angolo d'impatto $\alpha_{i_{avg}}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

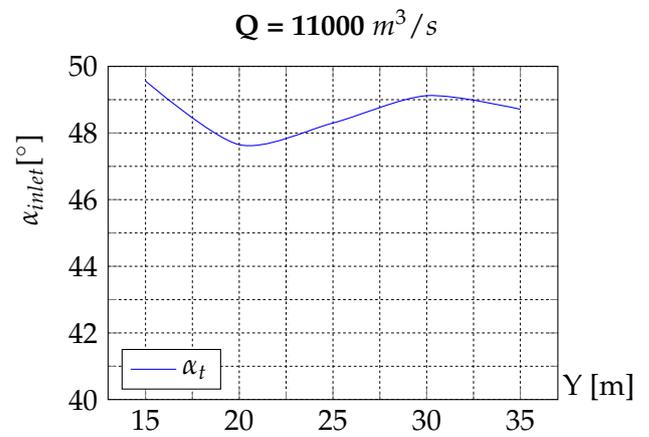


Figura 6.31: Dati medi dell'angolo d'impatto $\alpha_{i_{avg}}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

6.3.3 Gittata L_i

La valutazione della distanza minima e massima raggiunta dal getto in relazione al punto di stacco della vena fluida dal canale a salto di sci, centra l'obiettivo della sezione in esame. Esaminando le caratteristiche della superficie libera in prossimità di un piano posto a 0 m O.TW.L., è stato possibile effettuare la determinazione dei valori massimi e minimi assunti dalla vena fluida a differenti distanze $Y = 15; 20; 25; 30; 35; 40$ [m] dal piano di simmetria. I valori medi L_{avg} sono risultati da una media temporale². I Grafici seguenti analizzano:

- L_{min} → Gittata corrispondete al valore minimo e conseguente media temporale L_{min}^{avg} .
- L_{max} → Gittata corrispondete al valore massimo e conseguente media temporale L_{max}^{avg} .

La presenza della parete che simula la simmetria lungo l'asse [Y], fa nascere delle perturbazioni nella vena fluida che normalmente non ci sarebbero. Come descritto nel capitolo 6.2, i dati sono presi a partire da una distanza $Y = 15$ [m] a causa delle perturbazioni legate alla presenza della parete simulante la simmetria del dominio. Il confronto dei due grafici descritti in Fig.6.42 e

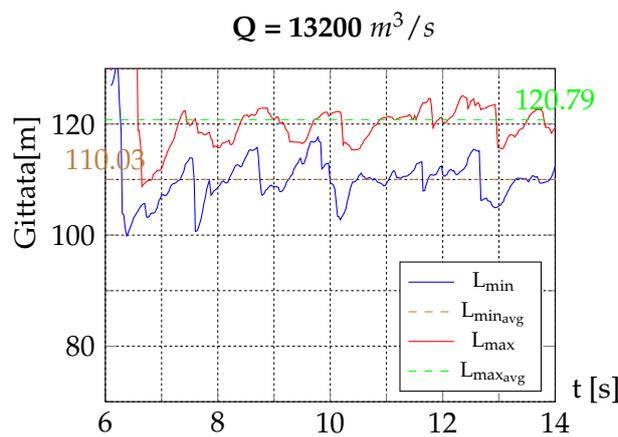


Figura 6.32: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 15$ m; $Q = 13200$ m^3/s

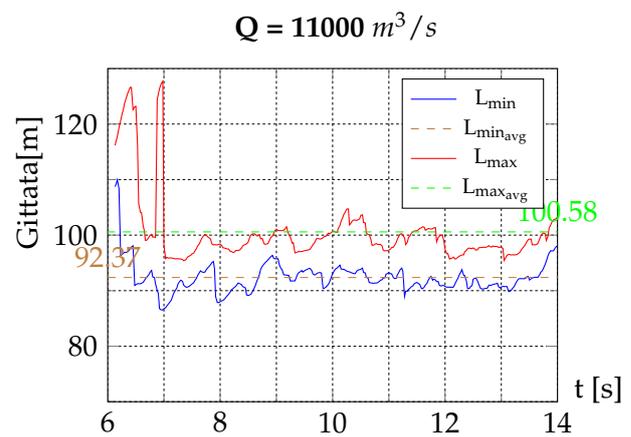


Figura 6.33: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 15$ m; $Q = 11000$ m^3/s

Fig.6.43 evidenzia la variazione della distanza di ingresso rispetto allo scivolo a salto di sci. In particolare per portate dell'ordine di 13200 m^3/s si ha una traslazione lungo [x] dell'ingresso del getto di circa 20 m. Tale risultato è in linea con l'analisi effettuata in letteratura descritta in Tab.4.3.

² Valutata sempre dall'istante temporale in cui il dato assume valori significativi per la grandezza in esame

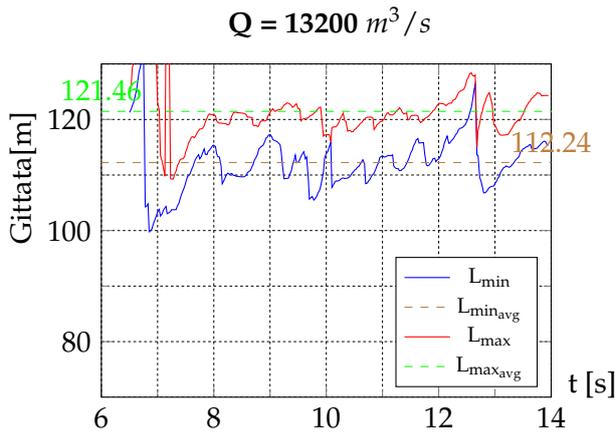


Figura 6.34: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 20 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

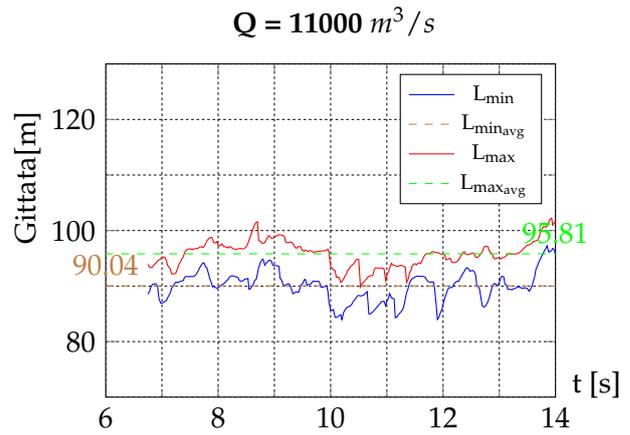


Figura 6.35: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 20 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

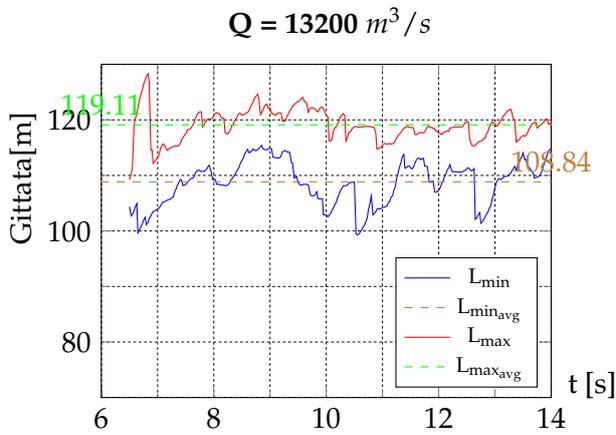


Figura 6.36: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 25 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

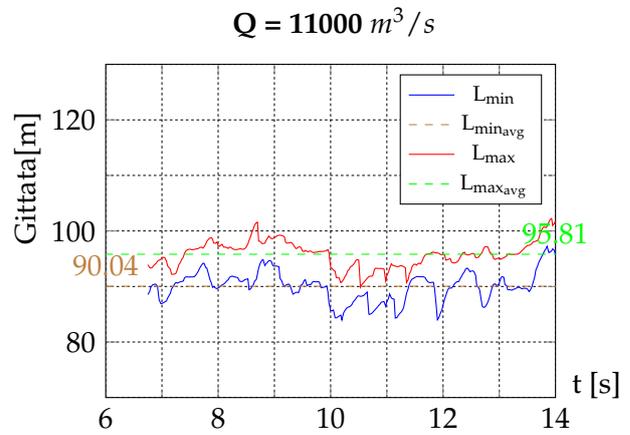


Figura 6.37: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 25 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

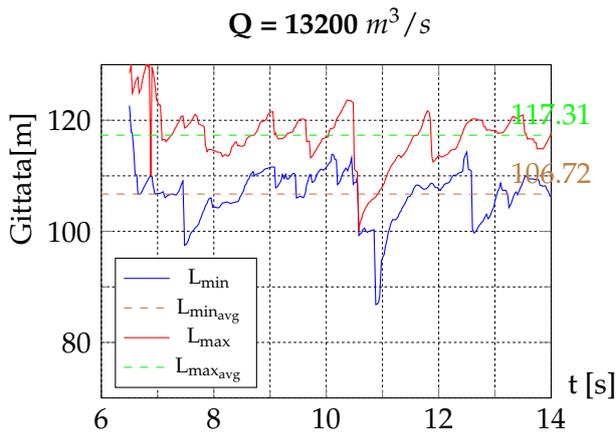


Figura 6.38: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 30 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

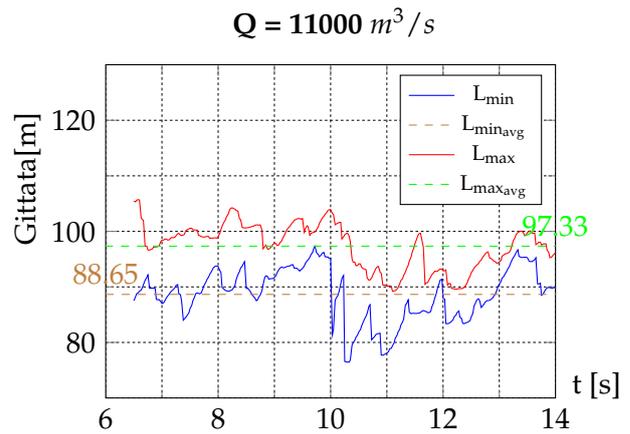


Figura 6.39: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 30 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

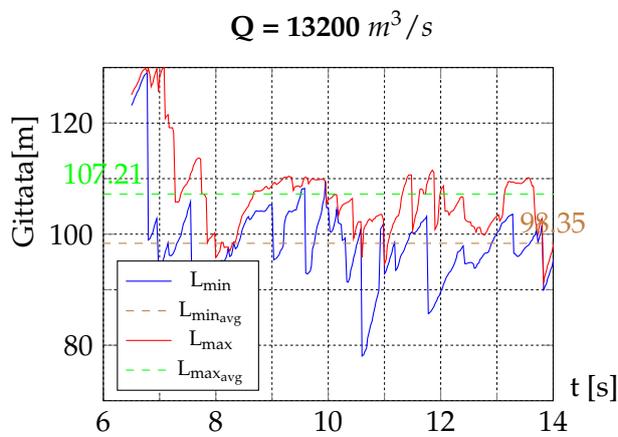


Figura 6.40: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 35 \text{ m}$; $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

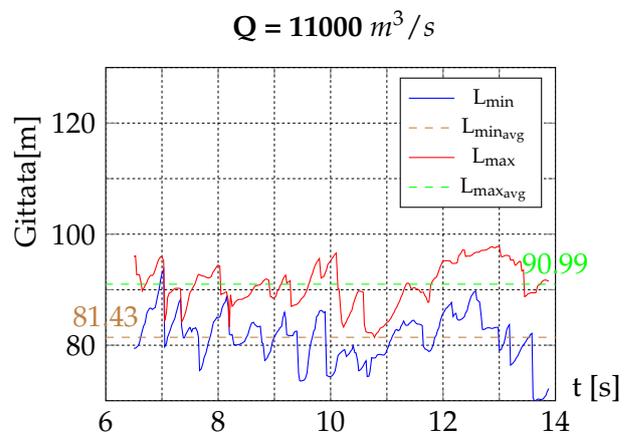


Figura 6.41: L_i , distanza dal piano di simmetria $y = 35 \text{ m}$; $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

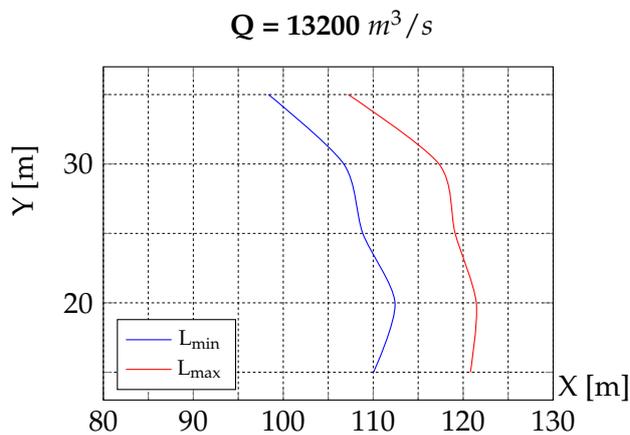


Figura 6.42: Grafico riassuntivo della gittata generato dai valori medi definiti nei grafici precedenti per $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

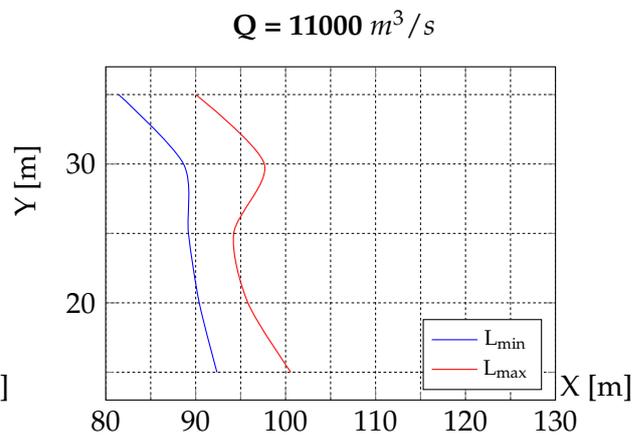


Figura 6.43: Grafico riassuntivo della gittata generato dai valori medi definiti nei grafici precedenti per $Q_2 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

6.3.4 Velocità d'impatto v_i

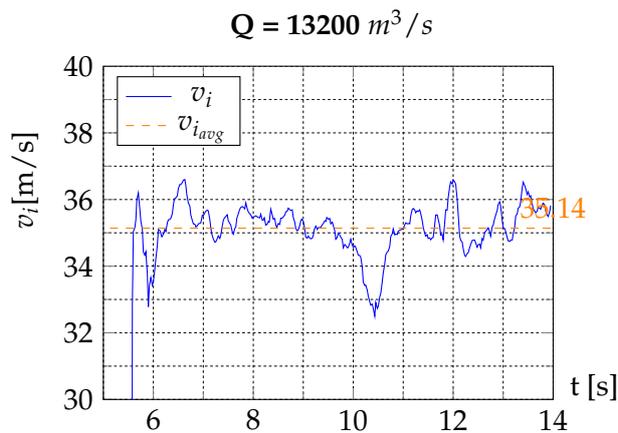


Figura 6.44: Grafico della velocità d'impatto media calcolata sull'intera area d'ingresso ad un'altezza di $z = 0$ m O.TW.L. - Simulazione effettuata con portata = 13200 m³/s

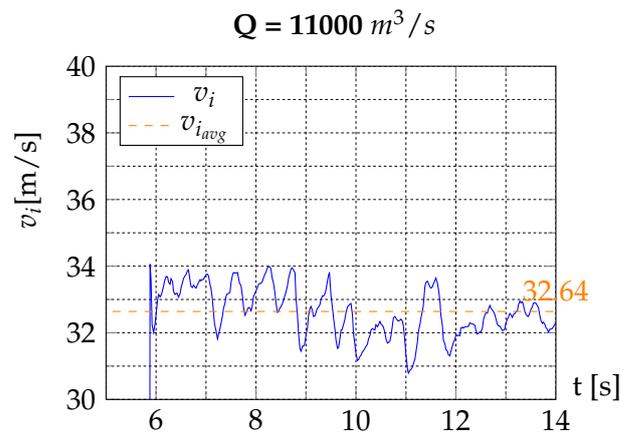


Figura 6.45: Grafico della velocità d'impatto media calcolata sull'intera area d'ingresso ad un'altezza di $z = 0$ m O.TW.L. - Simulazione effettuata con portata = 11000 m³/s

I comportamenti delle velocità nelle due simulazioni a differente portata è descritto in Fig.6.44 e Fig.6.45. In linea con la definizione di portata, nella simulazione con portate maggiori si avranno velocità medie più alte [Fig.6.44], mentre per portate minori la media delle velocità sarà inferiore [Fig.6.45]. Il piano di ispezione nelle due sottosimulazioni coincide al solito con una superficie posta a 0 m O.TW.L.

6.3.5 Pressioni p_b e velocità v_b sul fondo della vasca di dissipazione

I grafici in figura Fig.6.46 e Fig.6.47 mostrano l'andamento della pressione dinamica sul fondo della vasca di dissipazione. Risulta evidente come la componente dinamica sia pressoché uguale nelle simulazioni a differente portata.

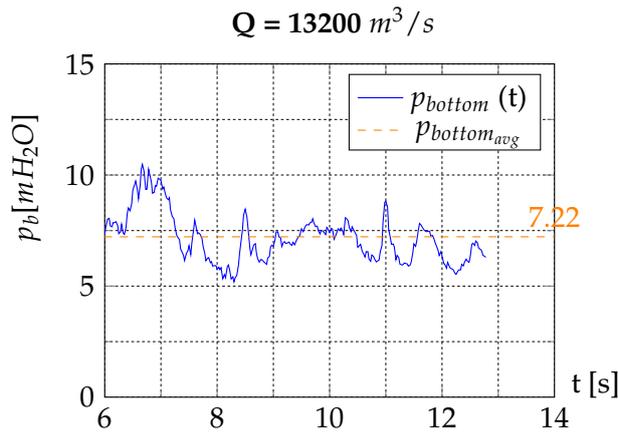


Figura 6.46: Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.

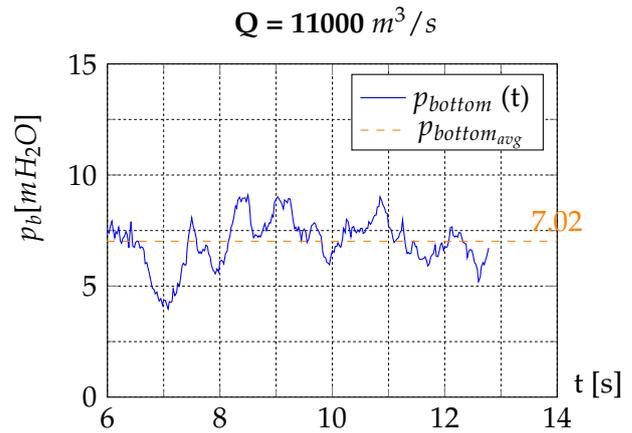


Figura 6.47: Andamento temporale della "pressione dinamica" sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.

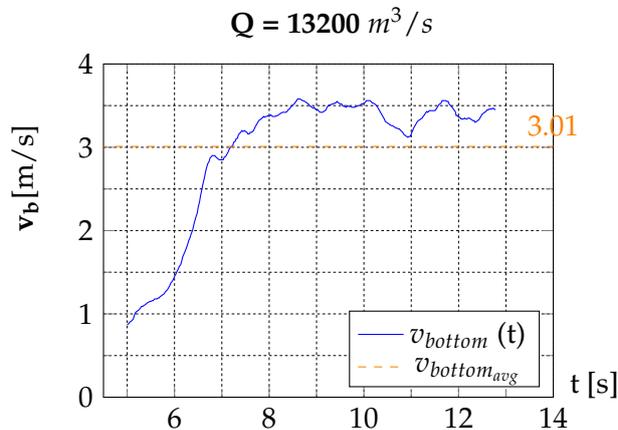


Figura 6.48: Andamento temporale della velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L. Il confronto dei grafici in Fig.6.48 e Fig.6.49 mostra come per la portata Q_2 le velocità sul fondo della vasca di dissipazione siano più basse rispetto a quelle derivanti dalla portata Q_1 . Di conseguenza è possibile

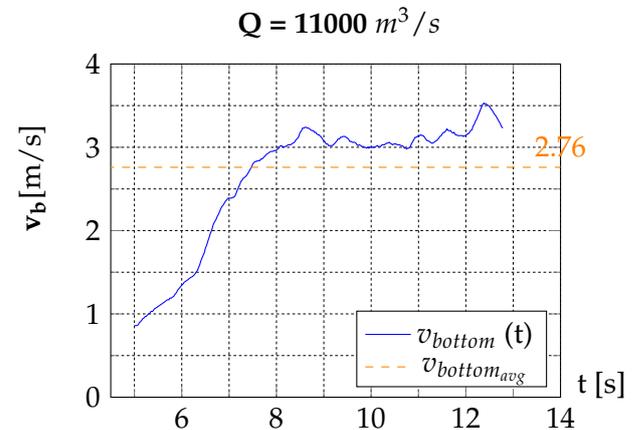


Figura 6.49: Andamento temporale della velocità sul fondo della vasca di dissipazione calcolata sull'intera area d'ingresso a $z = -10$ m U.TW.L.

6.4 Variazione spaziale delle velocità tangenziali sul fondo v_x e v_y

I risultati seguenti sono derivati da una media temporale delle velocità che si instaurano sul fondo della vasca di dissipazione a servizio dello scivolo. Per una caratterizzazione bidimensionale dell'impronta del getto è stata valutata la variazione spaziale delle velocità in relazione alla progressione spaziale. Vengono mostrati i risultati ottenuti per la stima della variazione lungo l'asse [X] e successivamente [Y].

6.4.1 Analisi della Simulazione con $Q = 13200$ m^3/s

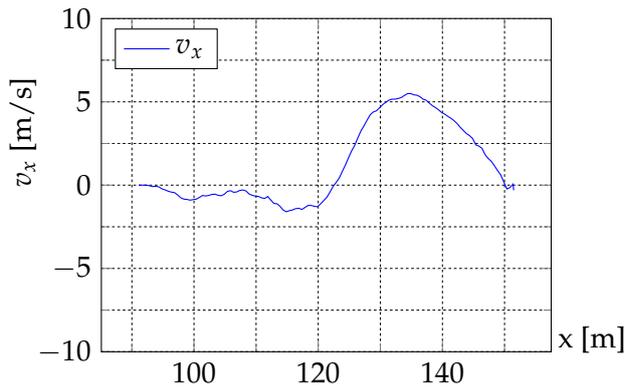


Figura 6.50: v_x ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

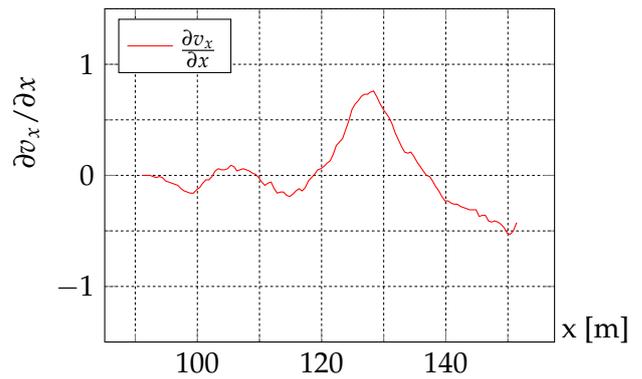


Figura 6.51: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 15$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

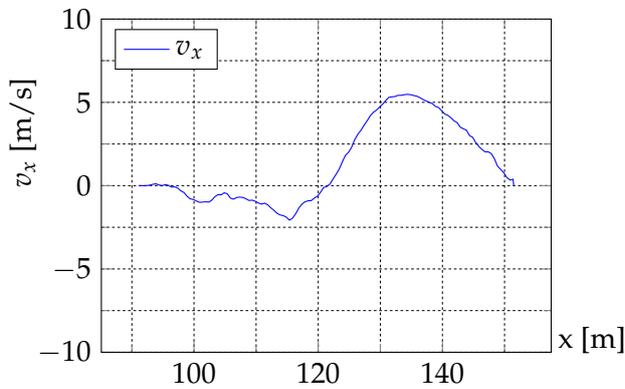


Figura 6.52: v_x ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

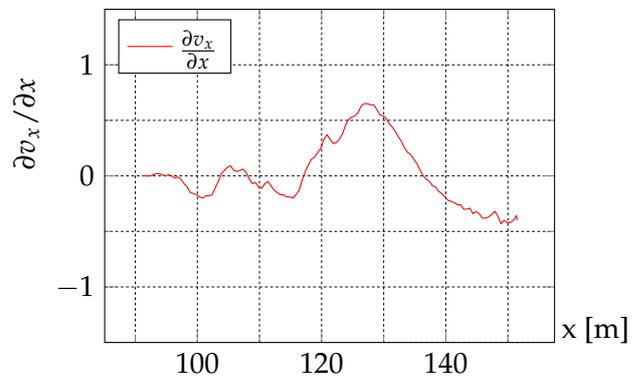


Figura 6.53: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 20$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

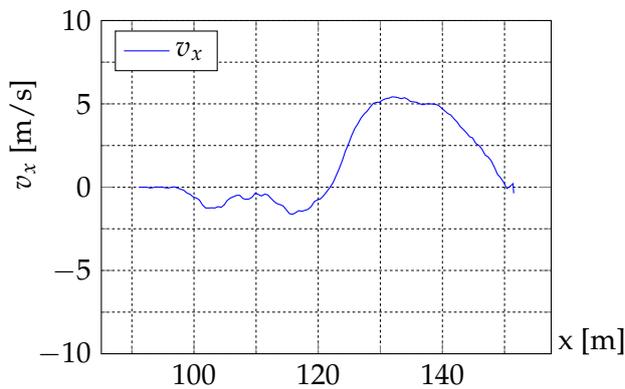


Figura 6.54: v_x ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

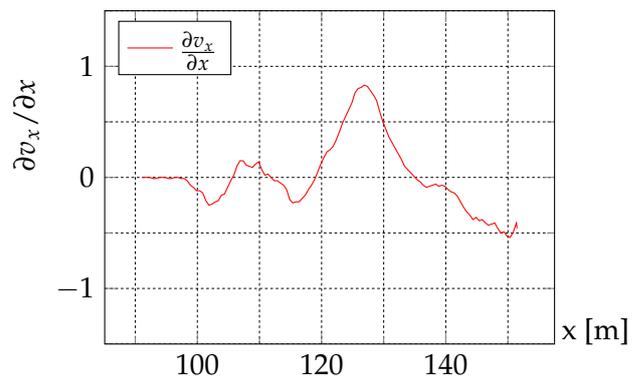


Figura 6.55: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 25$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

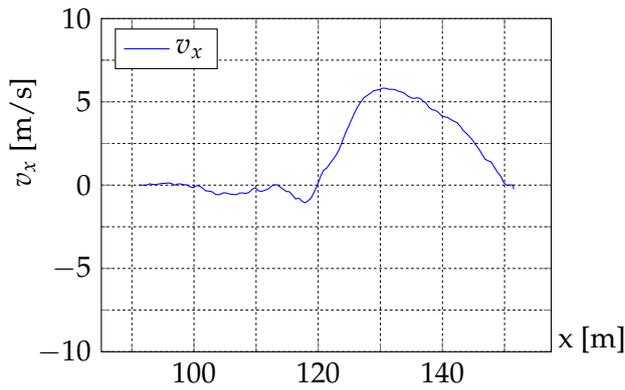


Figura 6.56: v_x ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

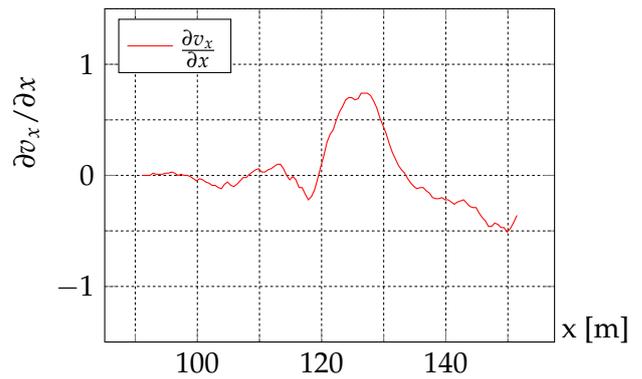


Figura 6.57: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

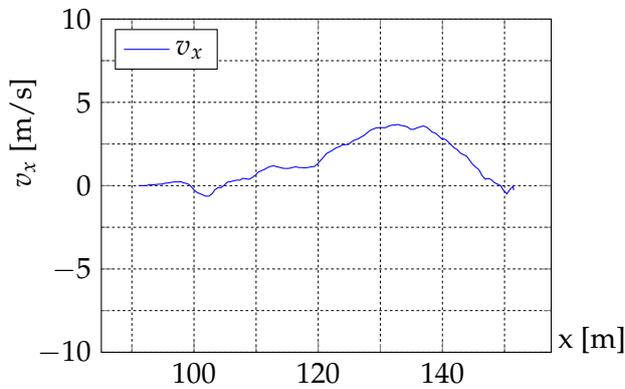


Figura 6.58: v_x ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

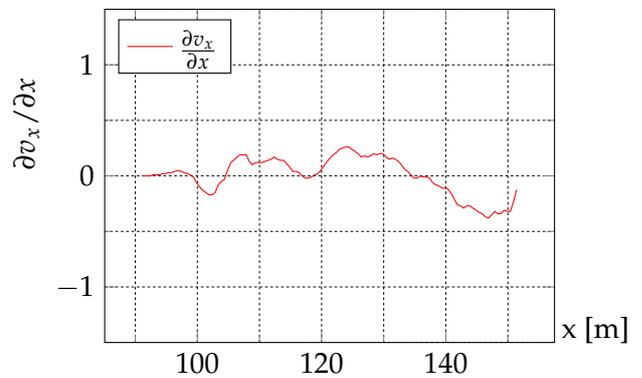


Figura 6.59: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

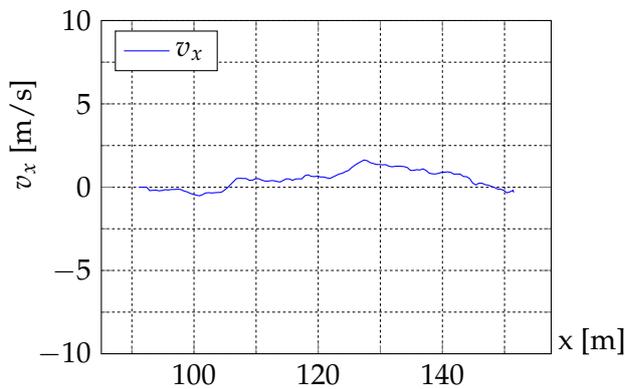


Figura 6.60: v_x ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

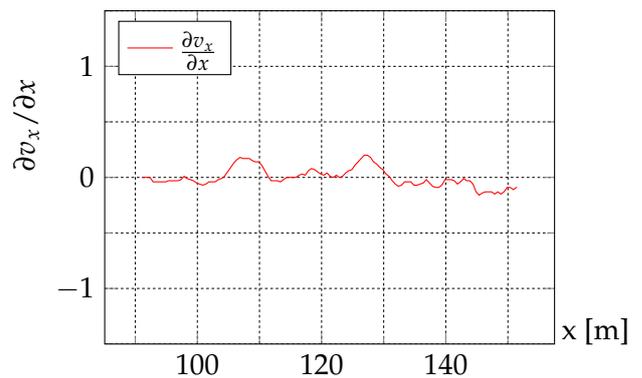


Figura 6.61: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 13200$ m³/s

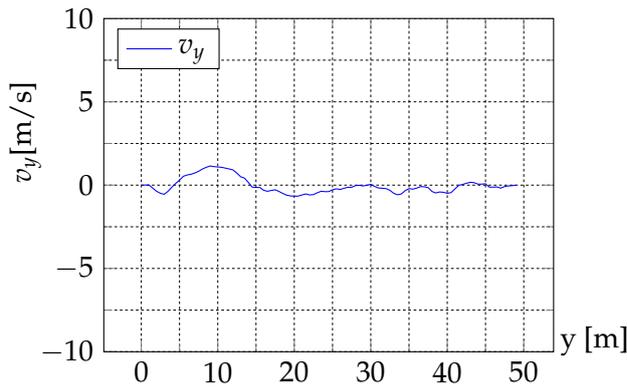


Figura 6.62: v_y ad una distanza $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

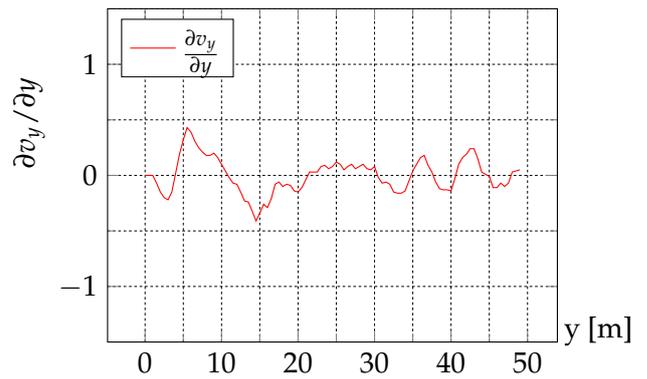


Figura 6.63: $\partial v_y / \partial y$ ad una distanza $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

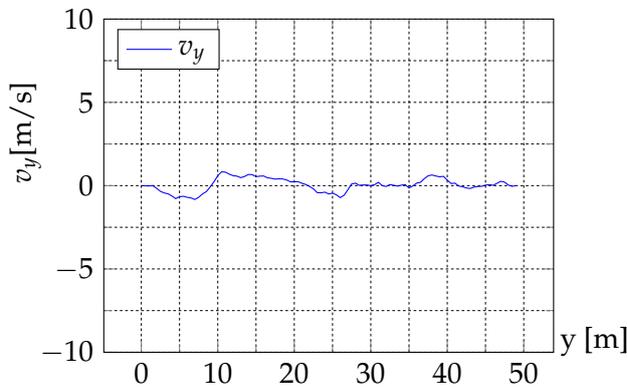


Figura 6.64: v_y ad una distanza $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

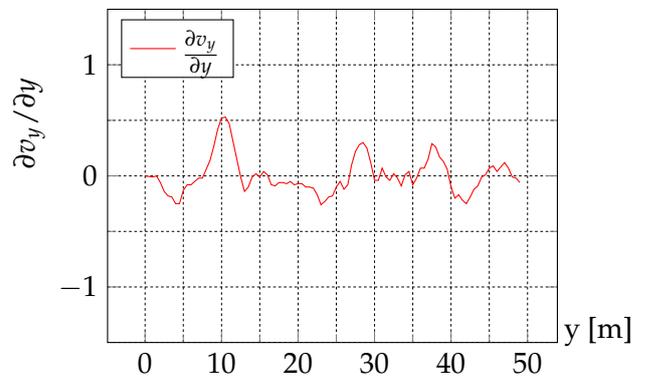


Figura 6.65: $\partial v_y / \partial y$ ad una distanza $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

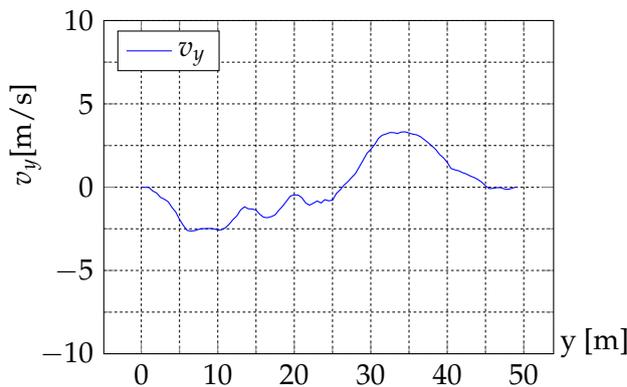


Figura 6.66: v_y ad una distanza $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

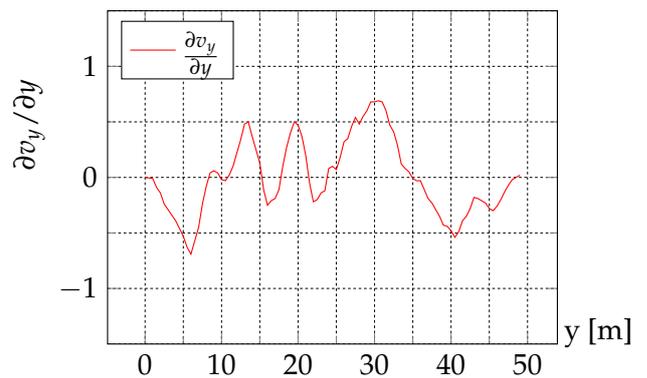


Figura 6.67: $\partial v_y / \partial y$ ad una distanza $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

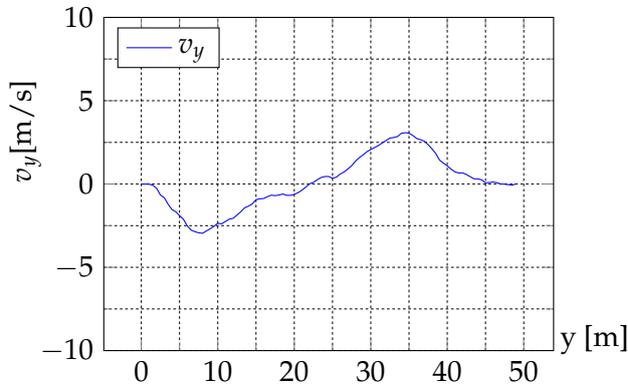


Figura 6.68: v_y ad una distanza $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$

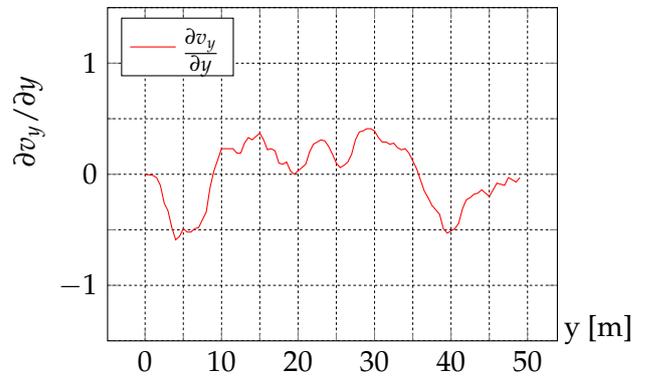


Figura 6.69: $\partial v_y / \partial y$ ad una distanza $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$

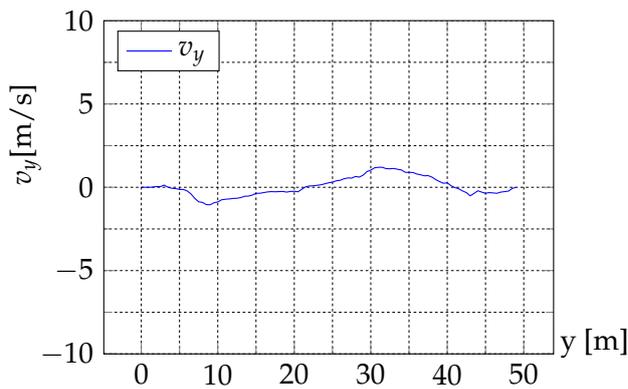


Figura 6.70: v_y ad una distanza $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$

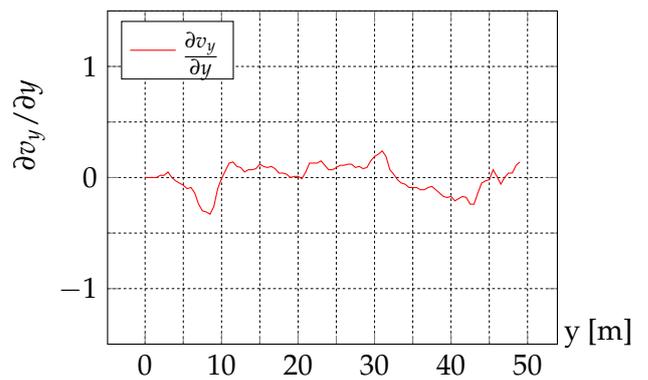


Figura 6.71: $\partial v_y / \partial y$ ad una distanza $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 13200 \text{ m}^3 / \text{s}$

6.4.2 Analisi della Simulazione con $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

Andamento velocità tangenziale v_x lungo l'asse [X]

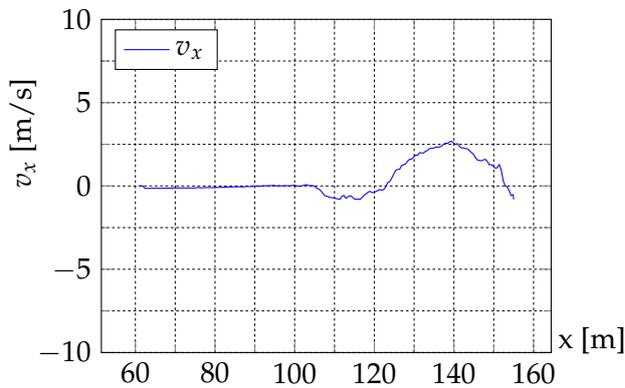


Figura 6.72: v_x ad una distanza $Y = 15 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

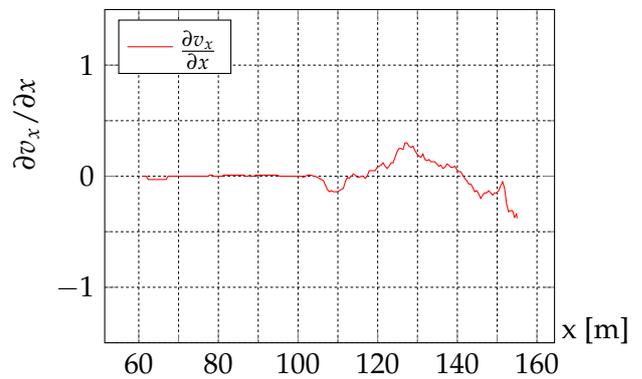


Figura 6.73: $\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 15 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

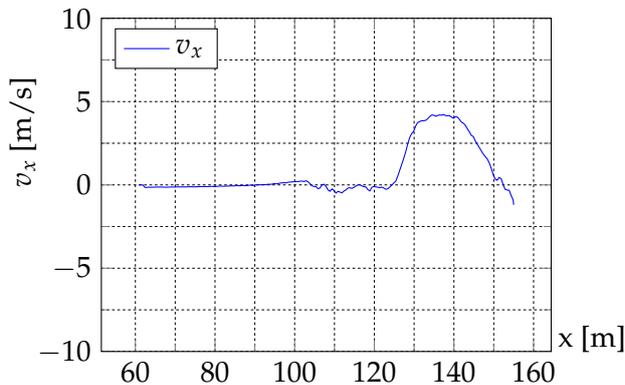


Figura 6.74: v_x ad una distanza $Y = 20 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

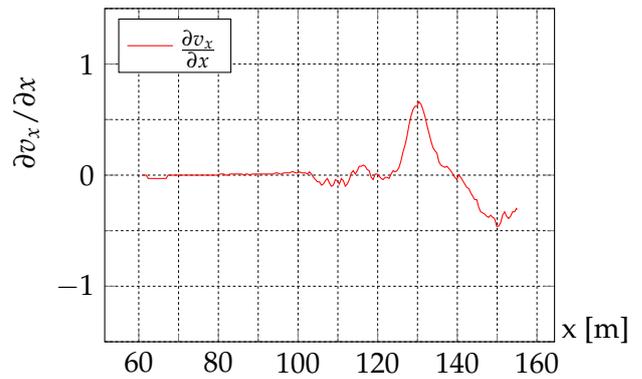


Figura 6.75: $\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 20 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

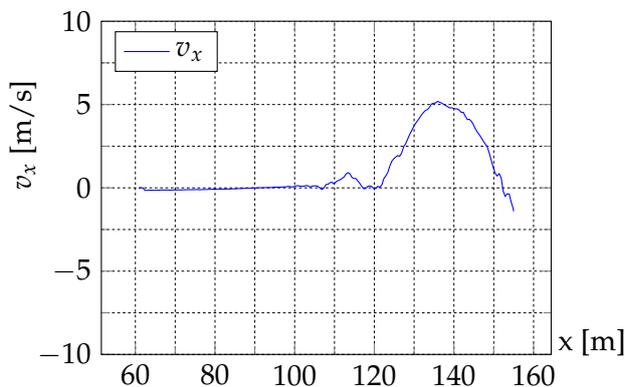


Figura 6.76: v_x ad una distanza $Y = 25 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

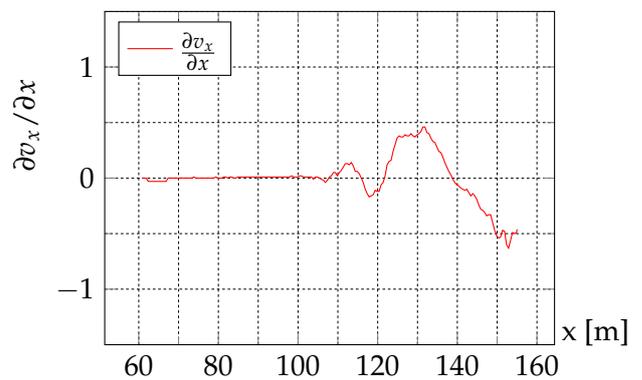


Figura 6.77: $\partial v_x/\partial x$ ad una distanza $Y = 25 \text{ m}$ dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

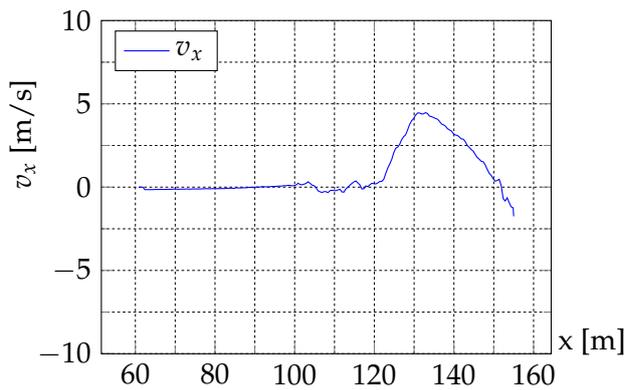


Figura 6.78: v_x ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

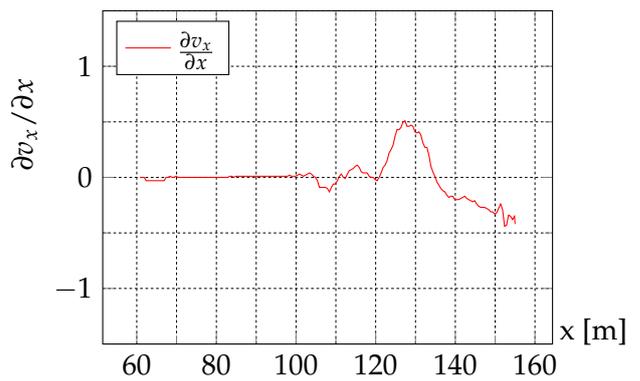


Figura 6.79: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 30$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

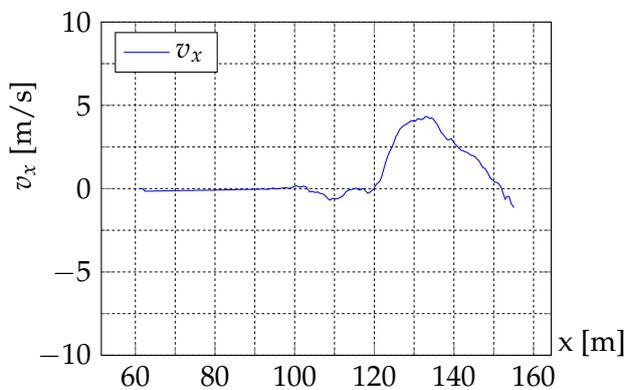


Figura 6.80: v_x ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

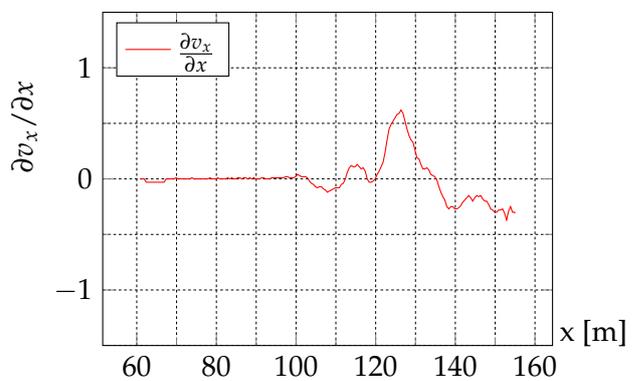


Figura 6.81: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 35$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

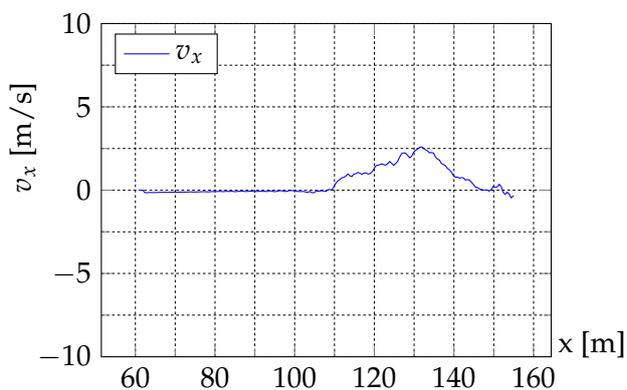


Figura 6.82: v_x ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

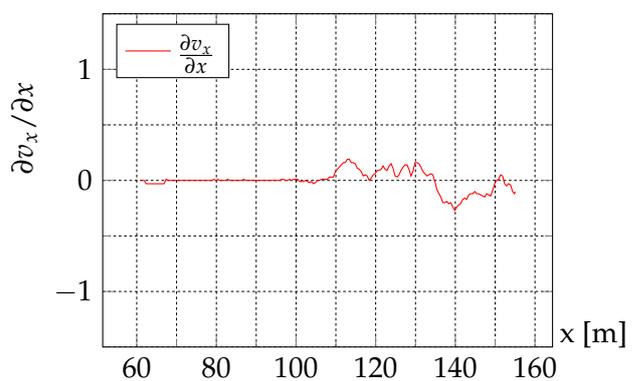


Figura 6.83: $\partial v_x / \partial x$ ad una distanza $Y = 40$ m dal piano di simmetria per $Q_1 = 11000$ m³/s

Andamento velocità tangenziale v_y lungo l'asse [Y]

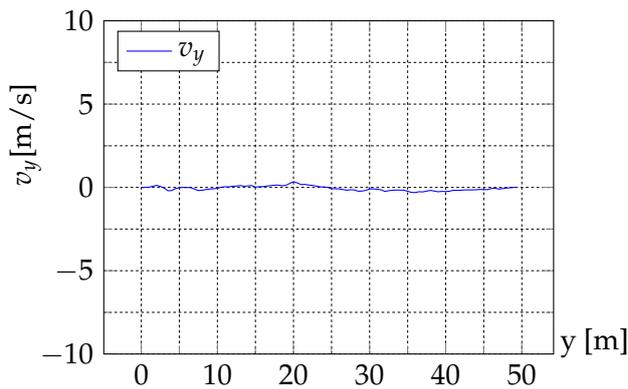


Figura 6.84: v_y a $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

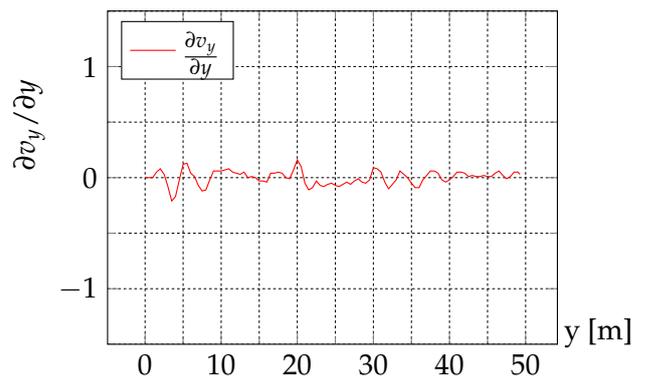


Figura 6.85: $\partial v_y / \partial y$ a $X=100$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

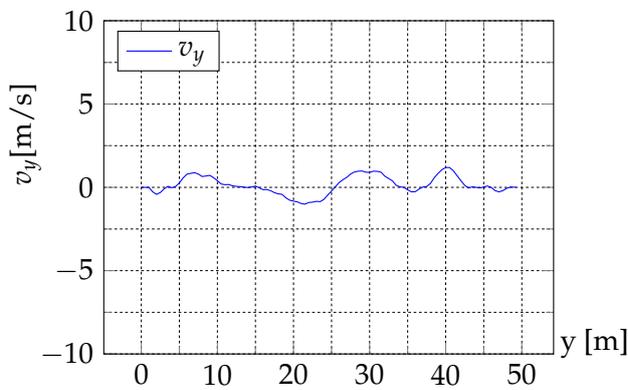


Figura 6.86: v_y a $X=110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

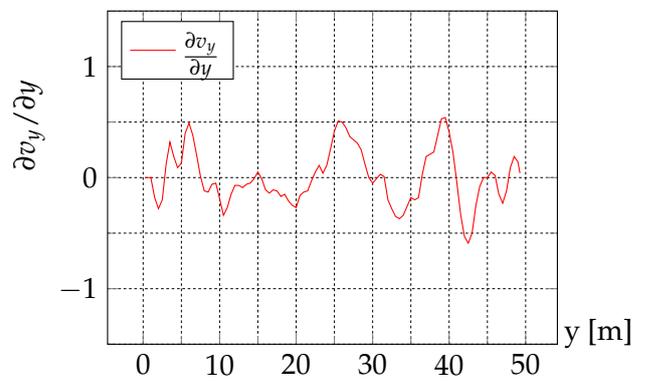


Figura 6.87: $\partial v_y / \partial y$ a $X = 110$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

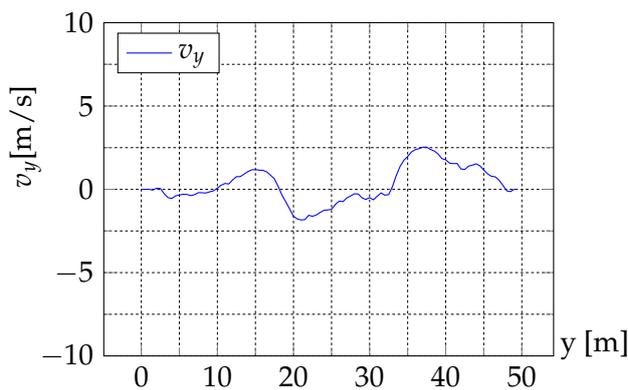


Figura 6.88: v_y a $X=120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

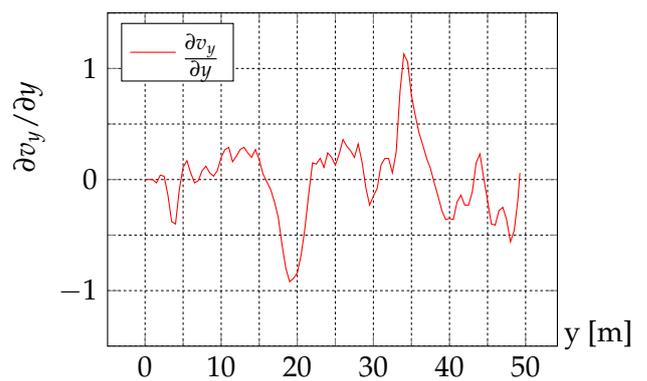


Figura 6.89: $\partial v_y / \partial y$ a $X = 120$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000$ m³/s

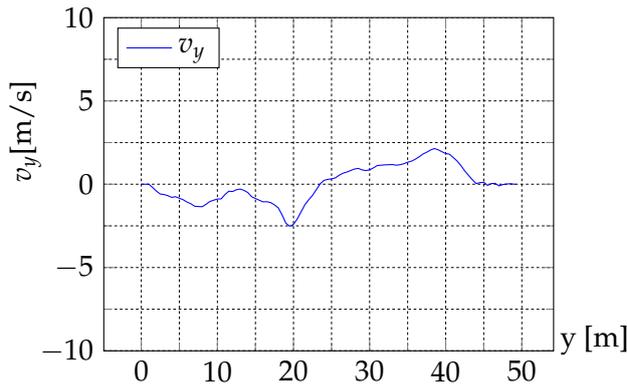


Figura 6.90: v_y a $X=130$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

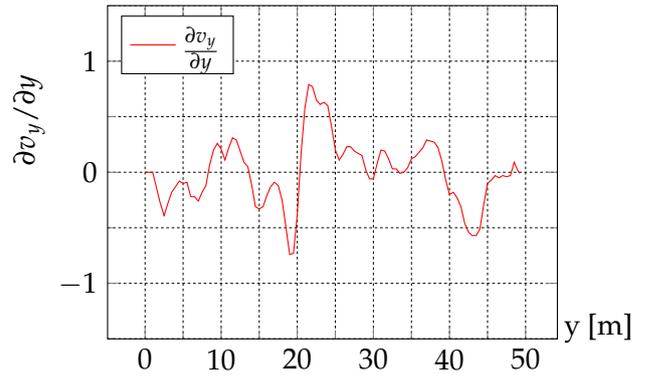


Figura 6.91: $\partial v_y / \partial y$ a $X = 130$ m dalla fine dello salto di sci

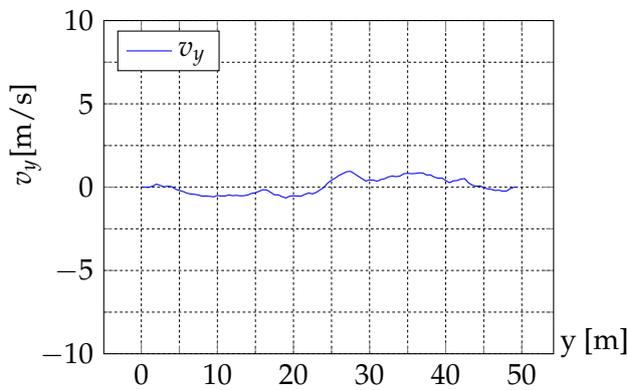


Figura 6.92: v_y a $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

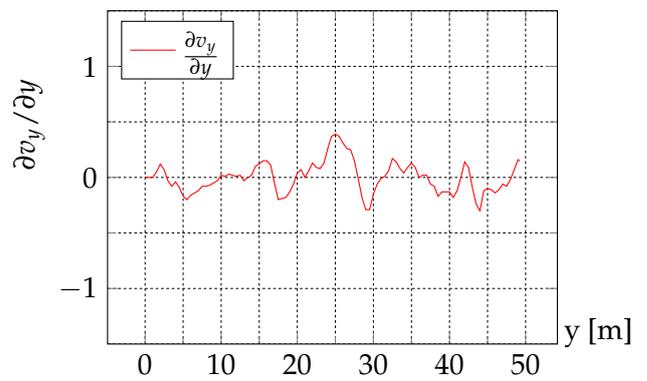


Figura 6.93: $\partial v_y / \partial y$ a $X=140$ m dalla fine dello salto di sci con $Q_1 = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

6.4.3 Stima delle dimensioni di scavo per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

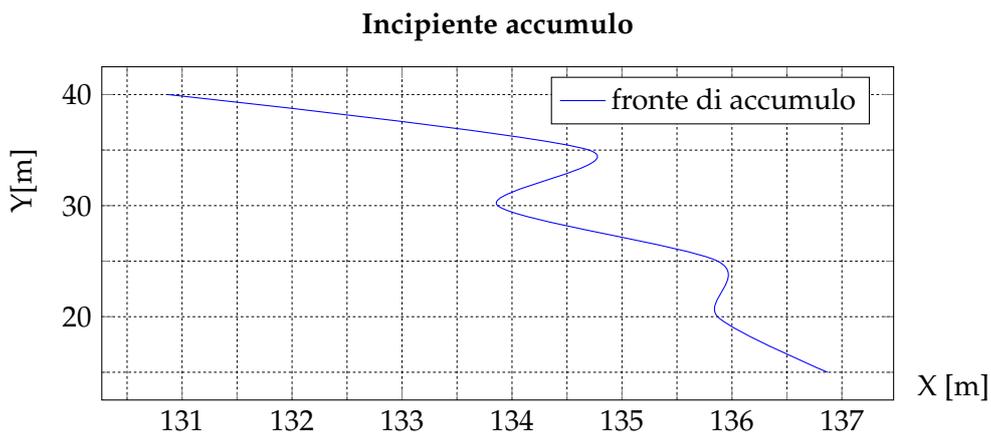


Figura 6.94: Grafico cumulativo dei dati sopraesposti rappresentante il fronte di inizio deposizione.

L'interpretazione del grafico mostrato in Fig.6.94 consente di suddividere, mediante la linea del fronte di accumulo, la zona a sinistra in cui è possibile prevedere un probabile scavo la

cui intensità è direttamente correlata alle derivate delle velocità. La zona a destra è indicativa della zona di deposito. Dal grafico si evince che la zona di accumulo del materiale generato dallo scavo nella parte centrale prossimale al piano di simmetria, avviene ad una distanza di 137 m circa dallo scivolo. Allontanandosi progressivamente, il fronte di accumulo indietreggia di circa 6 m attestandosi ad una distanza di 131 m dalla fine dello scivolo a salto di sci. Diverse considerazioni vanno effettuate per il grafico in Fig.6.95. La limitazione dovuta

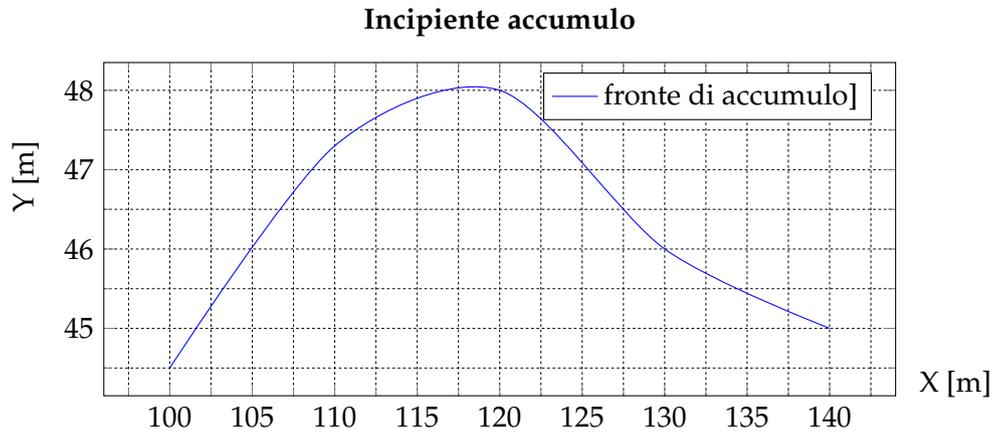


Figura 6.95: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

alla presenza di un dominio ridotto ai fini del calcolo delle caratteristiche, ha portato ad avere delle informazioni limitate circa l'estensione sull'asse delle [Y] dell'area di scavo. Le informazioni significative per la grandezza analizzata sono da ritenersi attendibili ad una distanza dal piano di simmetria di 25 m. Evidente dal grafico il punto di ingresso del getto nella vasca di dissipazione, che coincide con il punto di massimo del fronte di accumulo evidenziato nella Fig.6.95. Tale andamento è esplicativo di una zona di scavo al disotto della linea ed una zona di accumulo al disopra della stessa.

6.4.4 Valutazione impronta di scavo $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

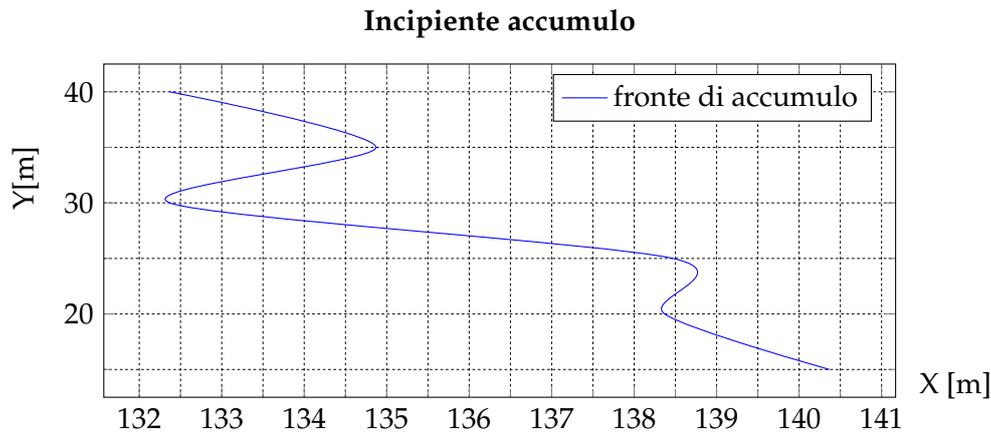


Figura 6.96: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

L'interpretazione del grafico mostrato in Fig.6.96 consente di suddividere, mediante la linea del fronte di accumulo, la zona a sinistra in cui è possibile prevedere un probabile scavo la cui intensità è direttamente correlata alle derivate delle velocità. La zona a destra del fronte è indicativa della zona di deposito. Dal grafico si evince che la zona di accumulo del materiale avviene ad una distanza di 140 m circa dalla parte terminale dello sfioratore in prossimità del piano di simmetria. Progressivamente, allontanandosi dalla sezione di simmetria, il fronte di accumulo indietreggia di circa 10 m attestandosi ad una distanza di 130 m dalla fine dello scivolo a salto di sci. Diverse considerazioni vanno effettuate per il grafico in Fig.6.96. La

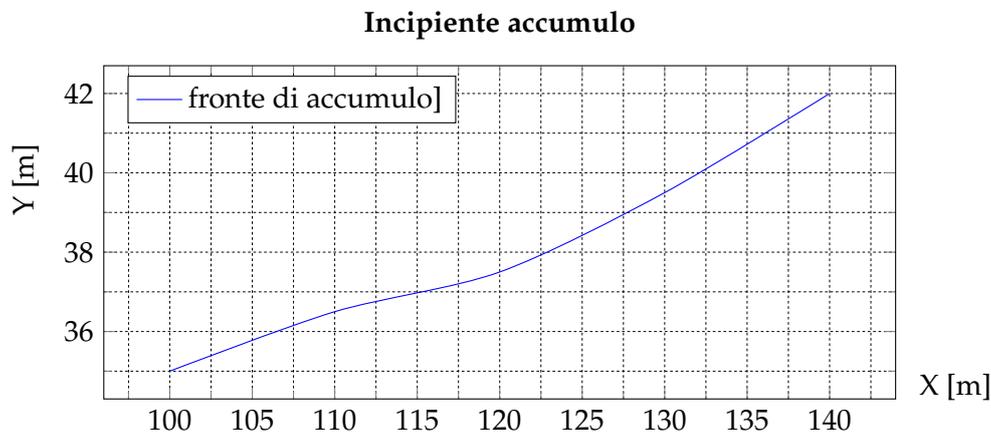


Figura 6.97: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

limitazione dovuta alla presenza di un dominio ridotto ai fini del calcolo delle caratteristiche, ha portato ad avere delle informazioni limitate circa l'estensione sull'asse delle [Y] dell'area di scavo. Le informazioni significative per la grandezza analizzata sono da ritenersi attendibili ad una distanza dal piano di simmetria di 35 m. Evidente dal grafico il punto di ingresso del getto nella vasca di dissipazione, il quale indietreggia rispetto alla simulazione precedente con

portata maggiore attestandosi ad una distanza dal salto di sci di 110 m. Tale andamento è esplicativo di una zona di scavo al disotto della linea ed una zona di accumulo al disopra della stessa.

Da notare come, in questa simulazione a portata inferiore, si abbia una riduzione dell'ampiezza del getto nella dimensione [Y].

6.5 Ricostruzione dell'intero dominio

Attraverso una mera similitudine dovuta all'asse di simmetria sono stati ottenuti i grafici seguenti, che descrivono l'estensione dello scavo lungo gli assi [X] e [Y] del dominio analizzato.

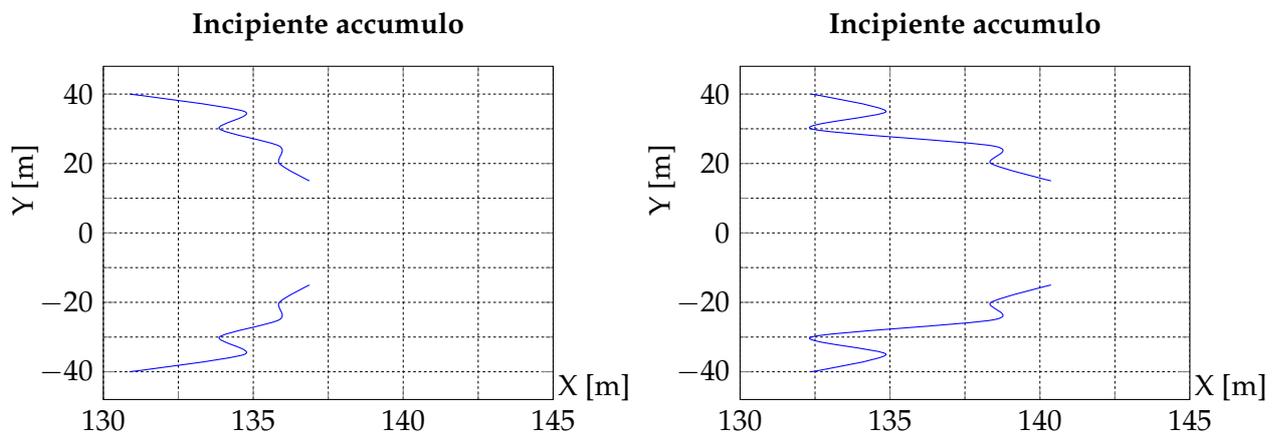


Figura 6.98: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

Figura 6.99: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

Tali grafici conclusivi riassumono la stima delle dimensioni di scavo prodotte dal getto entrante nella vasca di dissipazione. Per la portata Q_1 dai grafici in Fig.6.98 e Fig.6.100 si evince un'estensione lungo [X] di circa 8 m e [Y] di 78 m per un'area d'influenza complessiva di circa 768 m^2 soggetta ad escavazione. L'informazione riguardante la portata Q_2 è espressa dai grafici in Fig.6.99 e Fig.6.101: con un'estensione lungo [X] di circa 7 m e lungo [y] di 80 m l'area stimata soggetta ad escavazione ha un'estensione di 546 m^2 .

L'informazione riguardante l'intensità con cui il getto erode il fondo della vasca di dissipazione è data dalle derivate spaziali delle velocità tangenziali. Utilizzando la relazione (4.9) è possibile stimare la variazione nel tempo della quota del fondo. Il grafici Fig.6.102 e Fig.6.103 sono risultati dall'analisi spaziale della simulazione con $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$. La forma 3D visibile nelle figure mette è esplicativa delle zone di scavo e delle zone di accumulo del materiale potenzialmente eroso dalla corrente. Dal confronto con le Fig.6.104 e Fig.6.105 si evince che per portate maggiori l'area di scavo risulta essere maggiore e concentrata, mentre per portate minori l'accumulo risultante è più blando.

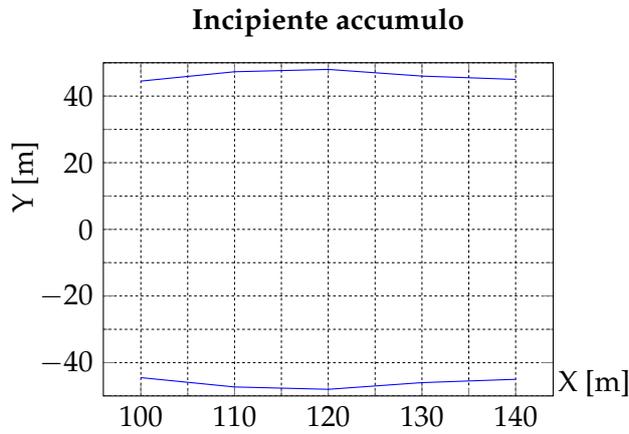


Figura 6.100: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

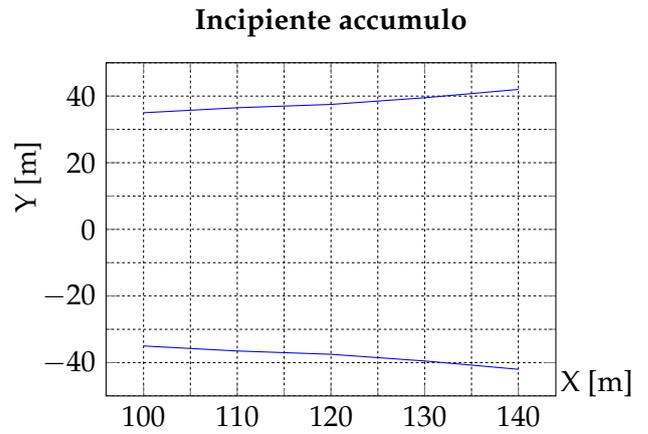


Figura 6.101: Fronte di accumulo derivante dall'analisi delle $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ per una portata $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$

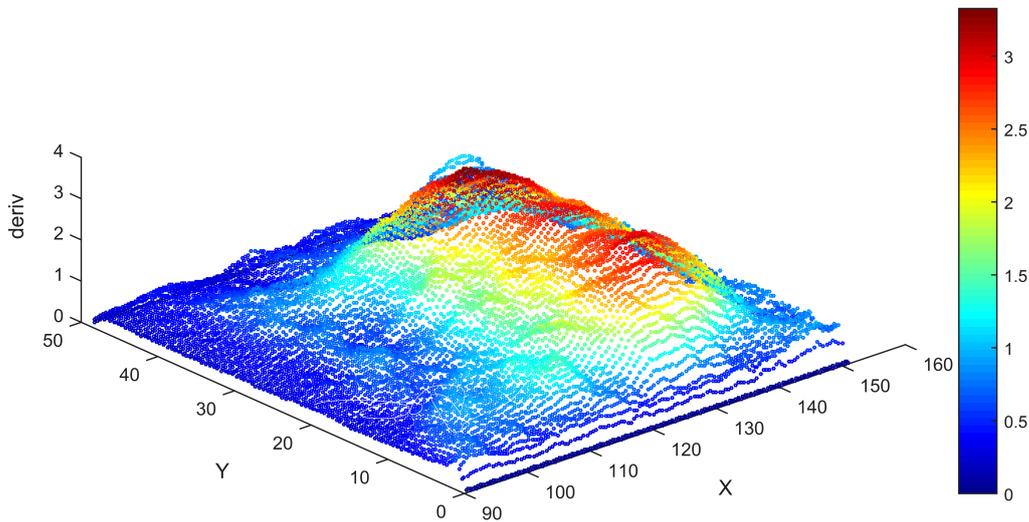


Figura 6.102: Andamento spaziale delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$

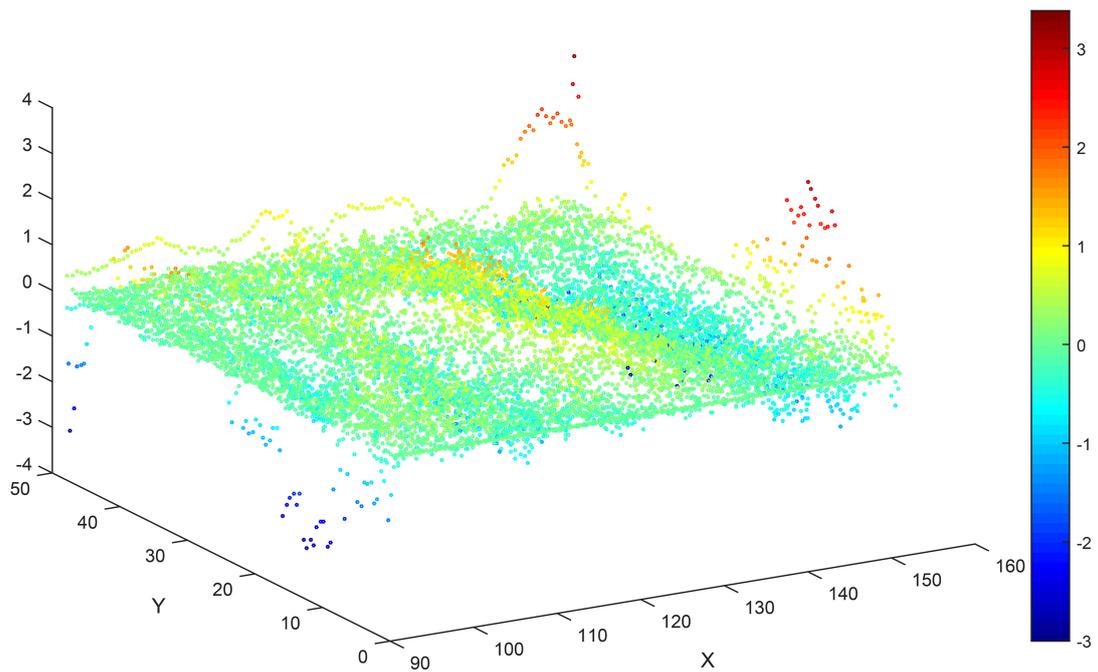


Figura 6.103: *Andamento spaziale della derivata delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 13200\text{m}^3/\text{s}$*

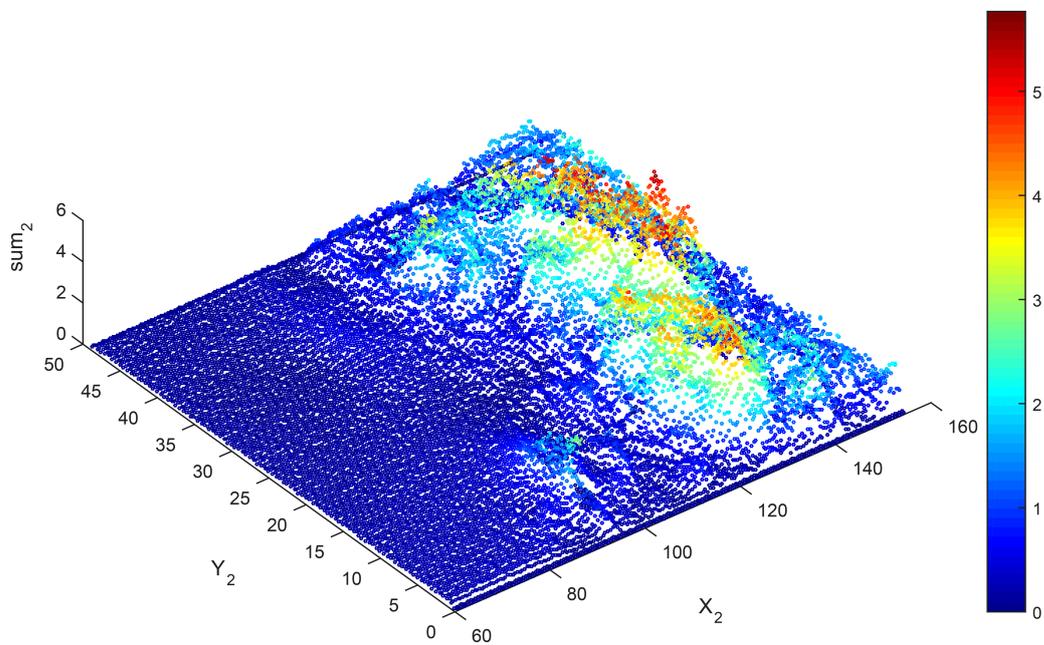


Figura 6.104: *Andamento spaziale delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 11000\text{m}^3/\text{s}$*

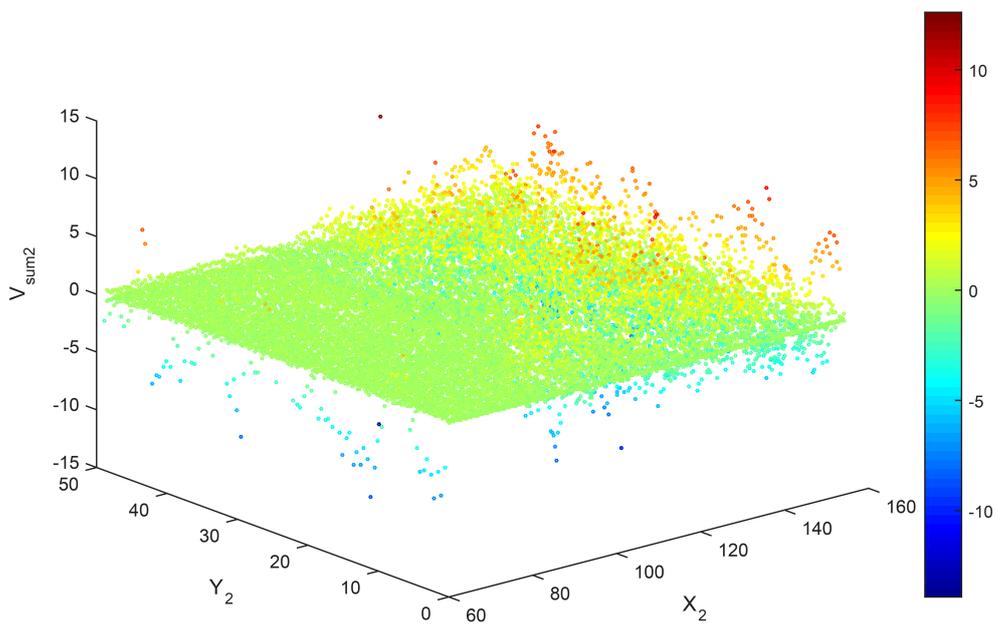


Figura 6.105: *Andamento spaziale della derivata delle velocità tangenziali sul fondo per $Q = 11000m^3/s$*

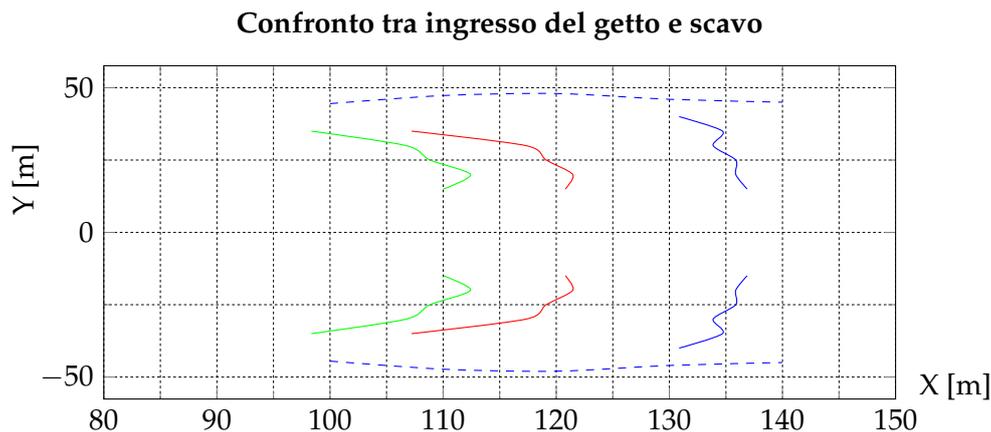


Figura 6.106: *Analisi comparativa tra l'impronta di scavo e l'ingresso del fluido per $Q = 13200 \text{ m}^3/\text{s}$*

Interessante risulta il grafico di confronto tra la il punto d'ingresso del getto definito dal calcolo della gittata L_{min} e L_{max} e l'incipiente accumulo. Tale confronto è stato analizzato in Fig.6.106 e Fig.6.107. Mentre nel primo grafico si denota un'ingresso del getto in un punto più distante seguito da un ravvicinato accumulo con espansione laterale lungo [Y] (Fig.6.106); nel secondo grafico la zona di scavo è più lineare e meno ampia, seppur prossimale al fronte di distanza di 140 m (Fig.6.107). Tale risultato, se da una parte conferma l'evidenza dovuta ad un ingresso con portata maggiore, dall'altro va contro l'intuizione rispetto la zona di inizio accumulo. Tale fenomeno potrebbe essere dovuto al fatto di aver considerato la lunghezza della vasca di dissipazione troppo vicina all'ingresso del getto. La presenza di una parete potrebbe indurre pressioni troppo elevate che, rallentando la velocità sul fondo, potrebbero indurre il deposito ad una distanza [X] minore rispetto a quella che si avrebbe considerando un dominio non confinato a valle.

Sviluppi futuri all'analisi effettuata potrebbero andare nella direzione di confermare l'ipotesi appena fatta.

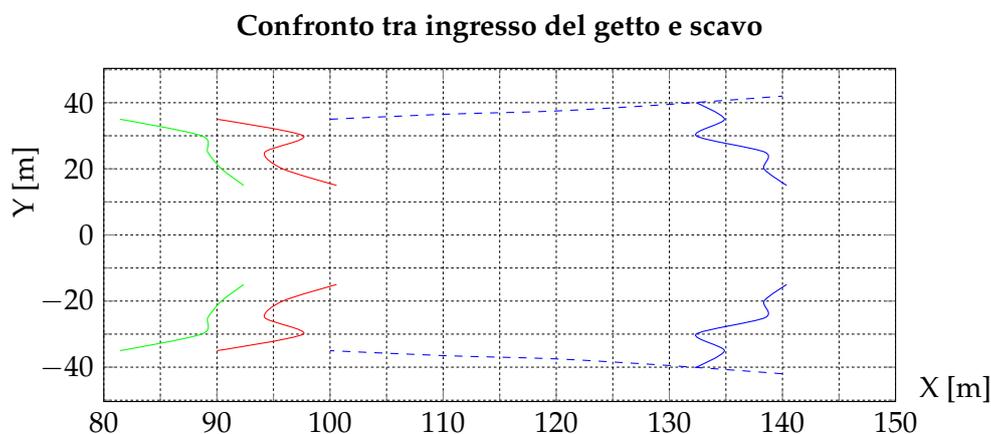


Figura 6.107: *Analisi comparativa tra l'impronta di scavo e l'ingresso del fluido per $Q = 11000 \text{ m}^3/\text{s}$*

OSSERVAZIONI CONCLUSIVE E LAVORI FUTURI

Dal punto di vista operativo, il ricorso alla fluidodinamica computazionale come supporto alla progettazione di infrastrutture idrauliche, permette di conoscere a priori l'evoluzione del generico processo di moto, prima che un eventuale modello sperimentale venga realizzato, il che si traduce in una sensibile riduzione dei tempi di progettazione e in un abbattimento dei costi.

Lo studio di tesi, in linea con quanto detto, ha portato alla definizione delle caratteristiche idrodinamiche del getto a valle di uno sfioratore a salto di sci entrante in una vasca di dissipazione. Nello specifico si è preso in esame un'opera idraulica e la si è studiata in scala prototipo. Tale soluzione coincide con la difficoltà di dover analizzare un dominio di calcolo cospicuo dal punto di vista computazionale.

La prima parte del lavoro di tesi, ha riguardato la ricerca delle condizioni al contorno da imporre per applicare una sensibile riduzione al dominio di calcolo. Su questa linea d'azione, è stata determinata una condizione iniziale idonea attraverso lo studio delle caratteristiche del moto uniforme gradualmente variato.

Descrivendo la condizione iniziale ricavata attraverso un'opportuna condizione al contorno implementata nel codice di calcolo *Palabos*, è stato possibile simulare le caratteristiche idrodinamiche in corrispondenza del salto di sci. La considerevole riduzione attuata ha permesso di centrare l'attenzione a valle dello sfioratore.

In linea con quanto esposto, sono state effettuate quattro simulazioni, distinte in relazione ai contenuti analizzati. In particolare nella *Simulazione 1*, a valle dello studio del dominio totale, sono state esaminate le caratteristiche di $[L_i, \mathbf{v}_i, A_i, \alpha_i, \mathbf{v}_b, p_b]$. Le stesse sono state stimate nella *Simulazione 2* al fine di valutare le incongruenze dovute all'ipotesi di dimezzamento sul piano di simmetria dell'opera idraulica.

La valutazione positiva del dimezzamento del dominio di calcolo scaturisce dal confronto effettuato su un volume analizzato comune alle due simulazioni. Nello specifico è stato affrontato un paragone tra $\mathbf{v}_i, A_i, \alpha_i, \mathbf{v}_b, p_b$ al fine di verificare tale ipotesi.

Nella *Simulazione Finale* è racchiusa l'analisi delle caratteristiche che permettono di determinare le dimensioni dello scavo sul fondo della vasca di dissipazione.

L'analisi dei risultati relativi alle velocità tangenziali su un piano posto a 10 m al disotto della superficie libera, hanno completato le informazioni per la definizione dell'estensione e

intensità dello scavo prodotto; ricavato attraverso il bilancio di materia definito dall'equazione di *Exner*.

Inoltre, nel LIAM (Laboratorio di Idraulica Ambientale e Marittima) del Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile-Architettura ed Ambientale dell'Università degli Studi dell'Aquila, si sta lavorando sulla costruzione di un modello fisico di una vasca di dissipazione da cui si è preso spunto nel presente lavoro per definire la geometria del modello proposto.

In ultima analisi non è stato possibile valutare propriamente le zone di erosione del getto a causa della ridotta geometria simulante la vasca di dissipazione. Sviluppi futuri potrebbero analizzare meglio l'erosione a partire dalle caratteristiche del getto ottenute nel lavoro di tesi ed avere un confronto sperimentale con il modello fisico citato.

BIBLIOGRAFIA

- C. Paola, V. R. Voller (2005). «A generalized Exner equation for sediment mass balance». In: *journal of geophysical research* 110(2).
- Celli, D. (2014). «Modello Lattice-Boltzmann applicato agli sfioratori di superficie». Tesi di laurea. Università degli Studi dell'Aquila.
- D'Alfonso, Dante (1981). «Sulle statistiche di Boltzmann, Bose, Fermi». In: *Phisic research* 1.1203.
- DiRisio, M. (2014). *Dispense del corso di Costruzioni Idrauliche Ambientali e Marittime*. LIAM: MDR.
- Kawakami, K. (1971). «A study on the computation of horizontal arrival distance of a water jet issued from a nozzle». In: *TRANS. JSCE* 3(2).
- Khatsuria, R. M. (2005). *Hydraulics of Spillways and Energy Dissipators*. New York: Marcel Dekker.
- Koelman, J. M. V. A. (1991). «Boltzmann Approach to Lattice Gas Simulations». In: *Europhysics letters* 15(6).603 - 607.
- M. C. Sukop, D.T. Thorne (2005). *Hydraulics of spillways and energy dissipators*. New York: Marcel Dekker.
- McNamara, G. R. e G. Zanetti (1988). «Use of the Boltzmann Equation to Simulate Lattice-Gas Automata». In: *Phys. Rev. Lett.* 61(20).2332 - 2335.
- Palpacelli, S. (2005). *Modelli Lattice-Boltzmann per fluidi immiscibili e fluidi in mezzi porosi*. Università di Camerino.
- Pomeau, U. Frish B. Hasslacher Y. (1986). «Lattice-gas automata for the Navier-Stokes equation». In: *Physical review letters* 14 (6) 1505-1508.

- Prisco, M. (2015). «Implementazione di un modello Lattice Boltzmann per lo studio delle opere a parete verticale forata». Tesi di laurea. Università degli Studi dell'Aquila'.
- Q. Zou, X. He (1997). «On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model». In: *Phys Fluids* 9.1591 - 1598.
- Regulski, W. e J. Szumbariski (2012). «Nuemrical simulation of confined flows past obstacles: the comparative study of Lattice Boltzmann and Spectral Element Methods». In: *Arch. Mech.* 64(4).423 - 456.
- Rothman, Daniel H. e Stéphane Zalenski (1994). *Lattice-gas models of phase separation: interfaces, phase transitions, and multiphase flow*. France: Reviews of Modern Physics.
- S. Pagliara D. Roy, M. Palermo (2010). «3D plunge pool scour with protection measures». In: *Hydro-environment Research* 4.225 - 233.
- Succi, S. (2001). *The Lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond*. Oxford University Press.
- Wolf-Gladrow, Dieter A. (2005). *Lattice-Gas Cellular Automata and Lattice Boltzmann Models - An Introduction*. D-27515 Bremerhaven: Springer.
- Wolfram, S. (1986). *Theory and applications of cellular automata*. Germany: World Scientific Publication.
- Z. Guo, C. Shu (2013). «Lattice Boltzmann method and its applications in engineering». In: *World Scientific*.

Ringraziamenti...Sentiti

Per la dedizione, disponibilità, umiltà, amicizia mista ad una sapienza unica nel suo genere, un pensiero va a *Marcello*... "IL" Professore, che con i suoi consigli ha saputo spronarmi nel modo più opportuno. Un caloroso grazie a *Davide, Daniele, Lucio*, che hanno contribuito ad un, non tanto sereno ma gioioso, periodo nella seconda casa L.I.A.M. . Sicuramente positivo e piacevole sarà l'archiviazione di questo periodo formativo condiviso con i miei compagni di tesi con cui, tra un'imitazione, un pugno battuto sul tavolo e le innumerevoli tazzine di caffè, si è riusciti a portare a termine ciò che si era iniziato... *Stefano e Francesco... Grazie.*

Per l'arguto sostegno e la protezione che hanno accompagnato tutto il percorso di studi e di vita, un ringraziamento particolare va ai miei genitori, *Maurizio e Rosalba*. A mia sorella *Alessia* invece, non dedicherò tante parole, basta dirle che il suo pensiero mi ricorda di avere a fianco, quando torno nella mia "tana", un fagottino premuroso e simpatico che solletica la mia vena irascibile.

A quel tripudio d'amore che pervade la quotidianità del mio cuore va tutto il mio affetto, a te *Laura* un pensiero talmente costante e coinvolgente che inciderlo con l'inchiostro servirà solo a far capire a chi legge l'importanza che rivesti nella mia vita.

Ai miei nonni, *Annita, Americo, Rocco, Maria, Giovannino e Pasqualina*... se sono cresciuto con sani principi è anche e soprattutto per merito vostro. Dovunque vada, *Voi* ci sarete sempre. Grazie...

Alla persona che mi considera come un figlio non dono un grazie qualunque, ma un affettuoso ringraziamento... *Anna Maria*; forte anche nei momenti più duri. La mia stima va invece a *Mario*, persona di saldi principi che ringrazio per gli insegnamenti che indirettamente ha saputo darmi. *Gmon*... sei la persona più perspicace che conosca, le notturne di pesca rimarranno sempre nei miei pensieri, e la tua amicizia rimarrà un sentimento imprescindibile.

Al mio caro e vecchio amico *Giuseppe*, che dai tempi in cui eravamo fisicamente apprezzabili ha condiviso estati, esperienze ed ha saputo essere un inaspettato dispensatore di consigli e spalla amovibile, va un gigantesco GRAZIE per il sincero sentimento che ci lega. Cara *Ele-*

nina il pensiero va anche a te.. anche per il solo fatto che porti gioia nella sua vita e che riesci a sopportare i decibel notturni che emette.

I miei zii sono unici, come fare per rendere i loro ringraziamenti non banali? A *Zio Augusto*, empio di vita.. il tuo insegnamento più importante lo tengo stretto nei miei pensieri, custodendolo e divulgandolo a chi avrà la capacità di apprenderlo. *Zia Alessandra*, quando il mio pensiero va a te ho in mente la tua risata; mi mette gioia. *Zio Marcello*, *Zia Luigina*, *Zio Pasquale* e *Zia Clelia*, a voi riservo un pensiero unico, spero di essere sempre un nipote rispettoso e di non perdere mai ogni momento importante con voi. *Zio Claudio*, *Zia Rita*, *Eleonora* ed *Emanuela*... vi ringrazio per l'affetto che nutrite nei miei confronti. Spero solo che ci siano più occasioni per stare insieme, perché le divergenze vanno fatte convergere.

Titta.. tu mi hai fatto parlare.. come fare a non ringraziarti. Abbiamo, seppur brevemente, condiviso emozioni... a te ringrazio per il sostegno e per l'incessante sprono. *Arduino* sei il cugino più figo al mondo, hai saputo infondermi consigli che mi hanno aiutato a superare alcuni momenti della mia vita; ti ringrazio per questo e per le pescate fatte e che ci faremo. Non posso non ringraziare i miei cuginetti super intelligenti e amorevoli *Aurora* e *Riccardo* per l'allegria che mi infondono ogni volta che li stringo tra le mie braccia.

A te *Andreina* va un ringraziamento particolare... oltre che una cugina unica, sei un'amica indispensabile e sempre disponibile.

Il percorso di studi porta a stringere amicizie che vanno oltre il semplice relazionarsi e condividere esperienze.. un sincero pensiero va alla prima persona che ho incontrato nella mia carriera universitaria, *Dante*.. alla sua ospitale e gentile famiglia che nel periodo post-terremoto mi ha ospitato amorevolmente. A tutti i miei coinquilini voglio lasciare uno spazio solo per ringraziarvi della grande pazienza che avete avuto nel sopportarmi.. grazie *Luca*, *Mauro*, *Alberto*, *Stefano*, *Domenico*, *Eros*. All'economista più simpatico va un pensiero speciale, grazie *Marco*, per la convivenza e le serate che hanno ci accomunato.

Allo scalatore tuttofare nato con la camicia e compagno di avventure nordiche va uno specifico ringraziamento...*Simone*; ricordati che devi scontare una birra a Bolzano, nella locanda della Forst... queste cose non le dimentico. *Alessandra*...sei unica; anche solo per il fatto che riesci a tenere i ritmi di quell'uomo.

Dai momenti passati nella sala prove alle serate fatte insieme, grazie ai *Rojo's Room* e

scusatemi se ho allentato quel fragile nodo che ci teneva uniti... *Luca* al piano/chitarra/voce *Angelo* voce "IM"portante, *Fabrizio* bassista senza tempo :), *Francesco Giovanni De Chellis* alias *Mimmo* groove batterista e *Fernando*; il periodo condiviso con voi mi ha fatto crescere e divertire come non mai.

Ai compagni d'avventura universitaria va un sentito saluto: *Denise*, alla neo-top-model *Marianna*, al peloso, irriverente personal-shopper pescarese *Simone il Pesciarolo*, al genio di *Marco Lo Scoppato* e a tutta la marmaglia di gente che adesso elencherò con compiaciuto affetto.. *Paolino*, *il grande Rezza*, *Giulio*, *Marco Pelliccione* (compagno di scalate notturne), *Alessandro Papa*, *Vincenzo*, *Davide*, *Alessandro D'Andrea*, *Giuseppe Martelloni*. A te, *Serena* invece, va tutto il mio sostegno per esserti presa quel macigno d'uomo di casa Fioritto, hai portato in lui una nuova luce negli occhi e mi hai dato l'opportunità di vederlo come un bambino innamorato. A te, marchigiana-castellana *Mariachiara*, associo il piacevole ricordo dell'alba a Montelparo, hai contribuito a rendere quel momento unico.

Un appassionato pensiero va alla famiglia *Fioritto*, *Santini*, *Tudini*... Le innumerevoli volte che sono stato ospite da voi mi avete trattato come un figlio (e fatto mangiare come un porco). La passione per il vino rosso e per le risate ci accomuna, un pensiero va a te *Veronica*, che a volte mi rubi la ragazza e a volte condividi con noi momenti unici. A *Francesca* e al *Dott. Mattia* ringrazio per avermi guidato nei meandri di Santorini e per la preziosa amicizia che si è creata. Ai futuri medici, non perché gli altri tre MINZIONATI prima non lo siano, *Giorgio*, *Giulia* ed *Alessandra* va un ringraziamento particolare per le serate ed i momenti condivisi. Chi non finirò mai di ringraziare sono *Federica*, *Concetta*, *Andrea*, *Serena*; senza la vostra cortese ed unica affabilità non avrei mai potuto concludere il mio percorso di studi in modo più lieto. A tutti i *Ragazzi del muretto*, che non sto qui a scrivere poiché in continua espansione e potrei perdermi qualche elemento, GRAZIE per i bei momenti passati insieme, le vacanze condivise e le piacevoli serate.

Beh.... a questo punto potrei anche ringraziare i miei gatti a partire dalla defunta *Cicalina*, a suo figlio *Crispi* e *Cocorita* che, anche se non sanno leggere, contribuiranno a far fare la pipì sopra questi fogli di carta che tra qualche decennio andranno utilizzati come carta per la pittura... a meno che qualcuno non voglia conservarla.

Ed infine... ringrazio *ME* stesso.. perché è orribile leggere il proprio nome alla fine dei rin-

graziamenti. A tutti voi, a chi ho dimenticato e a TE, che stai leggendo parte dei miei pensieri,
dico...

***** *Grazie* *****